Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева

УДК 517.9 (043) на правах рукописи

МЫРЗАҚҰЛ АҚБОТА РАТБАЙҚЫЗЫ

Исследование некоторых интегрируемых многослойных спиновых систем и их связи с многокомпонентными нелинейными уравнениями Шредингера

6D060100–Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научные консультанты
доктор физико-математических наук,
профессор
Е.Д. Нурсултанов

доктор PhD,
профессор
Д. Синглетон
(Фресно, США)

Республика Казахстан
Астана, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ 3
ВВЕДЕНИЕ….. 4
1 ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ОСНОВАННЫЙ НА СВОЙСТВЕ ИЗОМОРФИЗМА АЛГЕБР ЛИ $su(2) \cong so(3)$ ….. 9
1.1 Интегрируемые нелинейные уравнения.. 10
1.2 Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга..……. 12
1.3 Уравнение Чена – Ли – Лю и его эквивалентная спиновая система…… 24
1.4 Односолитонное решение обобщенного уравнения ферромагнетика Гейзенберга……………………………………………………………….. 33
Выводы по разделу...…………………………………………………….. 34
2 СИСТЕМА МАНАКОВА И ЕГО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СПИНОВЫЕ СИСТЕМЫ……………………………………………………………….. 35
2.1 Двухслойное спиновое уравнение (система) ……………………………… 36
2.2 Двухкомпонентная система Манакова …………………….. 38
2.3 Геометрически эквивалентный аналог связанного уравнения ……..… 39
2.4 Калибровочное преобразование между связанным спиновым уравнением и системой Манакова ………………………………………… 44
2.5 Калибровочная эквивалентность между Γ-спин системой и системой Манакова ……………………………………………………………….. 45
2.6 Связь между решениями связанного спиново уравнения и Γ-спин системы …………………………………………………..…………….. 47
Выводы по разделу...…………………………………………………… 48
3 МНОГОСЛОЙНАЯ СПИНОВАЯ СИСТЕМА И ВЕКТОРНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ………..…………….. 50
3.1 Многокомпонентное НУШ и многослойная СС ………………………... 51
Выводы по разделу...…………………………………………………… 63
4 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ И СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ………………………….. 65
4.1 Преобразование Дарбу и точные решения Γ-спин системы…..……… 66
4.2 Односолитонное решение Γ-спин системы ……………………..….. 70
4.3 Односолитонное решение двухслойного спинового уравнения ……… 70
Выводы по разделу...…………………………………………………… 72
ЗАКЛЮЧЕНИЕ ………………………………………………………….. 73
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ ……………………. 74
ПРИЛОЖЕНИЕ А–Геометрические потоки погруженных поверхностей 81
ПРИЛОЖЕНИЕ Б–Геометрические потоки кривых………….............. 82
ПРИЛОЖЕНИЕ В–Уравнения интегрируемой нити взаимодействующих вихрей 84

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

НЭУ	– нелинейное эволюционное уравнение
ИНУ	– интегрируемое нелинейное уравнение
НУШ	– нелинейное уравнение Шредингера
УФГ	– уравнение ферромагнетика Гейзенберга
УСФ	– уравнение Серре-Френе
УЧЛЛ	– уравнение Чена-Ли-Лю
ОУФГ	– обобщенное уравнение ферромагнетика Гейзенберга
СС	– спиновая система
ПД	– преобразование Дарбу
[,]	– коммутатор, $[A,B] = AB - BA$
$\wedge$	– векторное произведение
$\bar{A}$	– комплексное сопряжение
†	– эрмитово сопряжение
$M(n,\mathrm{C})$	– пространство всех матриц размерности nхn
$GL(n,C)$	– совокупность невырожденных матриц
$S(R)$	– пространство Шварца
$SU(2)$	– группа Ли, состоящая из матриц размерности 2х2
$su(2)$	–алгебра Ли, состоящая из матриц размерности 2х2
$so(3)$	–алгебра Ли, состоящая из матриц размерности 3х3

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Одним из приоритетных направлений современной математической физики является изучение нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ) в частных производных. На основе создания теории интегрируемых НЭУ лежит метод обратной задачи рассеяния, который был развит Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой применительно к уравнению Кортевега-де Фриза. Метод обратной задачи рассеяния изучалась в работах М. Абловиц, Х. Сигура [1], Дж. Лэма [2], Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббона [3], А. Ньюэлла [4], С.П. Новиков, С.В. Манаков, Л.П. Питаевского [5], В.Е. Захаров, А.Б. Шабата [6-7], М. Абловиц, Д.Дж. Кауп, А. Ньюэлла [8], Н.-Х. Чанга, Дж. Шата, К. Анленбэка [9] и др.

В последние десятилетия возрастает интерес к изучению теории интегрируемых НЭУ. Это связано с тем, что именно интегрируемые НЭУ имеют приложения в различных областях естественных наук. Например, в дифференциальной геометрии они могут воспроизвести интегрируемые классы кривых и поверхностей, а в физике они описывают нелинейную динамику волновых процессов. Дальнейшее развитие теории интегрируемых НЭУ можно найти в работах Й. Ишимори [10], Л.-Й. Ма, С.-Ф. Шэна, З.-Н. Жу [11], Дж. Лэма [12], Х.Д. Уолквист, Ф. Эстабрука [13], Р. Хэрмана [14], К.М. Лакшманан, К.М. Тамижмани [15].

В работах геометров XIX-XX веков, были установлены основные связи между обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями в частных производных с дифференциальной геометрией кривых и поверхностей [16-20]. Интегрируемые нелинейные уравнения имеют геометрические связи, как с движущимися пространственными кривыми, так и с поверхностями. Вопросам о связях интегрируемых НЭУ с дифференциальной геометрией посвящены работы [21-26]. Эти связи ясно выражены на примере нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) и уравнения ферромагнетика Гейзенберга (УФГ), которые являются одними из основных уравнений интегрируемых НЭУ. Это показано в работах [27-31].

В настоящее время однокомпонентные и однослойные интегрируемые НЭУ хорошо изучены, а исследования многокомпонентных и многослойных является актуальной задачей. Некоторые из таких уравнений будут продемонстрированы в данной диссертационной работе.

Цель работы. Исследование многокомпонентных нелинейных эволюционных уравнений Шредингерского типа и нахождение эквивалентных к ним многослойных спиновых систем на основе теории интегрируемых НЭУ. Разработка обобщенного метода установления геометрической и калибровочной эквивалентности между интегрируемыми НЭУ, в том числе для многослойных, а также нахождения их точных солитонных решений для двухслойных случаев.

Обьекты исследования: НУШ, УФГ, векторное нелинейное уравнение Шредингера, многослойные спиновые системы и их одно-, двух-, трех-, n-слойные редукции.

Для реализации цели диссертационной работы поставлены **следующие задачи:**

– разработка метода установления эквивалентности между интегрируемыми нелинейными уравнениями и спиновыми системами на основе некоторых свойств алгебр Ли;

– установление геометрической связи между двухслойными интегрируемыми уравнениями и расширение выводов для n-слойных связанных уравнений Шредингерского типа и спиновых систем;

– установление калибровочной связи между двухслойными интегрируемыми уравнениями;

– обобщение метода преобразования Дарбу для нахождения точных решений двухслойных связанных интегрируемых нелинейных уравнений.

Методика исследования. В диссертационной работе рассматриваются многослойные ИНУ, обладающие богатой внутренней структурой, что позволяет исследовать их различными методами теории солитонов. Привлекательной чертой теории многослойных ИНУ является тесная связь нелинейных уравнений математической физики и дифференциальной геометрии.

Известные методы теории солитонов: методы установления геометрической и калибровочной эквивалентности между ИНУ из различных областей математики и физики; метод преобразования Дарбу для нахождения точных решений обобщаются для многослойных ИНУ.

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами.

Диссертационная работа выполнялась в соответствии с планами научно-исследовательских работ следующих проектов грантового финансирования МОН РК:

1) по приоритету «Интеллектуальный потенциал страны» по теме: «Исследование обобщенного уравнения Ландау-Лифшица с самосогла-сованными источниками и его интегрируемых редукций» на 2015-2017гг.;

2) научные исследования в области естественных наук по теме «Исследование связи геометрии поверхностей/многообразий и интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений» на 2020-2022гг.

Научная новизна.

Научная новизна работы заключается в следующем:

– впервые предложен метод установления эквивалентности между однослойными интегрируемыми нелинейными уравнениями на основе свойств изоморфизма алгебр Ли $su(2)$ и $so(3)$. Метод продемонстрирован на нелинейном уравнений Шредингера (НУШ) и уравнений ферромагнетика Гейзенберга (УФГ), а также на уравнениях Шредингерского типа и обобщенном УФГ;

– впервые выведена двухслойная спиновая система (СС) и установлена ее геометрическая связь с двухкомпонентной системой Манакова;

– установлена связь между двухслойной СС и Г-спин системой, а также доказана эквивалентность последней к системе Манакова;

– метод преобразования Дарбу расширен для Г-спин системы и построено его солитонное решение;

– метод установления эквивалентности для двухслойных интегрируемых нелинейных уравнений расширен для *n*-слойных векторных НУШ и СС.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер и внесет вклад для дальнейшего развития теории многослойных интегрируемых нелинейных уравнений, о чем свидетельствуют комментарии на результаты исследования, которые выставлены на международную платформу ученых «Researcher Gate»:

– профессор Российской академии наук В.Г. Марихин о статье [32]: «На мой взгляд, матрица Дарбу для Г-спин системы – новый и полезный результат. Представление Лакса для спиновой системы также является новым. Калибровочная эквивалентность между связанным спиновым уравнением и системой Манакова является очень интересным фактом. Эта статья является важным вкладом в теорию представлений Лакса и теорию преобразований Дарбу. Надеюсь, что результаты этой статьи получат дальнейшее развитие»[1];

– комментарии профессора Т. Канна из Индии на работу [33]: «Эта работа хороша и откроет новые исследования в направлении многокомпонентных интегрируемых систем»[2] .

Положения диссертации, выносимые на защиту:

На защиту выносятся следующие результаты исследования, полученные впервые в рамках диссертационной работы:

– новый метод установления эквивалентности между интегрируемыми нелинейными уравнениями на основе свойств алгебр Ли;

– установлены геометрическая и калибровочная эквивалентности между двухслойными интегрируемыми уравнениями;

– получены точные солитонные решения обобщенного УФГ, Г – спин системы и двухслойной спиновой системы;

– обобщение метода установления геометрической эквивалентности между двухслойными интегрируемыми уравнениями на трех- , четырех-, и *n*-слойных случаев.

Апробация полученных результатов. Результаты исследования докладывались в международных конференциях, как: XX Международная конференция «Geometry, Integrability, Quantization» (June 2-7, 2018. Varna, Bulgaria); XIV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «ЛОМОНОСОВ – 2018» (Астана, 2018); Республиканская

---

[1] https://www.researchgate.net/publication/305683359_Darboux_transformations_and_exact_soliton_solutions _of_integrable_coupled_spin_systems_related_with_the_Manakov_system/comments

[2] https://www.researchgate.net/publication/304167610_Integrable_motion_of_two_interacting_curves_spin_systems_and_the_Manakov_system/comments

научно-практическая конференция «Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана» (Астана, 2018).

Публикации. В рамках исследования по теме диссертационной работы опубликовано 7 работ:

1. Surfaces and curves induced by nonlinear Schrodinger-type equations and their spin systems // Symmetry. – 2021. – Vol.13. – P.1827-1-1827-18 (квартиль по WoS – Q2, процентиль по Scopus – 90%).
2. Integrable motion of two interacting curves, spin systems and the Manakov system // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2017. – Vol.14, №07. – P.1750115 (квартиль по WoS – Q2, процентиль по Scopus – 47%).
3. Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrödinger equation // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2017. - Vol. 14, №10. – P.1750136 (квартиль по WoS – Q2, процентиль по Scopus – 47%).
4. Integrability of the two-layer spin system // Geometry, Integrability and Quantization. – 2019. – Vol.20. – P.208–214 (процентиль по Scopus – 24%).
5. Интегрируемость двух взаимодействующих кривых и геометрически-эквивалентный спиновый аналог уравнения Манакова // Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. – 2016. –Вып. 113, №4. – С. 23-26.
6. Интегрируемость двух параметрического уравнения M-LIII // XIV международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов – 2018». Тезисы докладов XIV международной научной конференции . - Астана, 2018. - Часть 1. - С.32-33.
7. Об интегрируемости спиновой системы с самосогласованным потенциалом // Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана. Сборник материалов республиканской научно-практической конференции. - Астана, 2018. - С.101-106.

Цитируемость научных результатов. Основные научные результаты, полученные в рамках данной диссертации цитируются в работах ученых из дальнего зарубежья:

1. Третья работа из выше приведенного списка опубликованных работ трижды цитируется зарубежными авторами: Nana Jiang, Meina Zhang, Jiafeng Guo, Zhaowen Yan [34] в журнале «Chaos, Solitons and Fractals», doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109644; Zhaowen Yan, Bian Gao, Minru Chen, Jifeng Cui [35] в журнале «Chaos, Solitons and Fractals», doi.org/10.1016/j.chaos.2018.11.011; Rong Han, Haichao Sun, Nana Jiang, Zhaowen Yan [36] в журнале «Journal of Nonlinear Mathematical Physics», doi.org/10.1007/s44198-021-00001-0.
2. Результаты первой статьи из выше приведенного списка опубликованных работ цитируется авторами Rachel Klauss, Aaron Phillips and José M. Vega-Guzmán [37] в журнале «Symmetry», doi.org/10.3390/sym14030465.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных работ и приложения.

В первом разделе предлагается алгебро-геометрический подход, позволяющий универсально описывать симметричные нелинейные интегрируемые уравнения. Метод основан на теории изоморфизма алгебр Ли $su(2)$ и $so(3)$. Предлагаемая схема является расширенной, исходя из ранее известных результатов в [38, 39], где устанавливается геометрическая и калибровочная эквивалентность, соответственно, между нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) и уравнением ферромагнетика Гейзенберга (УФГ).

Во втором разделе рассматривается модель двух взаимодействующих движущихся кривых. Находится его связь с некоторой интегрируемой спиновой системой. Затем доказывается, что это интегрируемое спиновое уравнение эквивалентно известной системе Манакова.

Третий раздел посвящен развитию теории интегрируемых многослойных спиновых систем. Исследуется их связь с геометрическими потоками взаимодействующих кривых и поверхностей в некотором пространстве R^n. Показано, что эквивалентным аналогом многослойной спиновой системы является векторное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ).

В четвертом разделе обобщаем преобразование Дарбу для общей $su(3)$-значной спиновой системы, называемой Γ - спин системой, и получаем ее солитонные решения.

Внутреннее единство диссертационной работы. Результаты исследования излагаются по принципу "от простого к сложному". Сначала исследуются некоторые однослойные (однокомпонентные) интегрируемые нелинейные уравнения из различных областей математической физики, как: нелинейное уравнение Шредингера, модель ферромагнетика Гейзенберга. Затем рассматриваются двухкомпонентная система Манакова и двухслойные спиновые системы. Далее, результаты исследования обобщаются для n-компонентных векторных НУШ.

1 ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ИНТЕГРИРУЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ОСНОВАННЫЙ НА СВОЙСТВЕ ИЗОМОРФИЗМА АЛГЕБР ЛИ $su(2)\cong so(3)$.

Симметрия в дифференциальных уравнениях в частных производных в последние годы нашла широкое применение в области интегрируемых нелинейных уравнений (ИНУ). Симметрии соответствующего преобразования группы для ИНУ позволяют значительно упростить процедуру установления эквивалентности между такими уравнениями из разных областей естественных наук, что в свою очередь открывает возможности легко находить их решения. В данной главе мы исследуем симметрию между нелинейным уравнением Шредингера (НУШ) и уравнением ферромагнетика Гейзенберга (УФГ). Связывающим средством этих двух ИНУ будет уравнение Серре-Френе (УСФ).

Методом исследования в данном разделе будет алгебро-геометрический подход, основанный на свойстве изоморфизма алгебр Ли $su(2)$ и $so(3)$, которое является одним из основных свойств групп Ли [40,41].

В этой главе нам понадобятся следующие понятия, как пространства Шварца, группа и алгебры Ли.

Определение 1 [42]. Пространство Шварца – это пространство быстро убывающих функций, т.е. состоит из таких бесконечно дифференцируемых функций, что любая их производная убывает быстрее любой степенной функции. Обозначение: $S(R)$.

Определение 2 [43]. Группа Ли $SU(2)$ - это специальная унитарная группа, состоящая из матриц A размерности 2x2, которые удовлетворяют условиям:

$$\det A = 1, \quad \overline{A}^T A = I, \quad A \in SU(2).$$

Для группы Ли $SU(n)$ определяется аналогично.

Теперь приведем некоторые сведения об алгебрах Ли $su(2)$ и $so(3)$ из унитарных и ортогональных групп Ли [44].

Определение 3. Алгебра Ли $su(2)$ - это специальная унитарная алгебра, состоящая из косоэрмитовых матриц с нулевым следом

$$\overline{A}^T = -A, \quad Tr\, A = 0, \quad A \in su(2).$$

Для алгебры Ли $su(n)$ определяется аналогично.

Определение 4. Алгебра Ли $so(3)$ - это специальная ортогональная алгебра, состоящая из кососимметричных матриц с нулевым следом

$$A^T = -A, \quad Tr\,A = 0, \quad A \in su(2).$$

Для алгебры Ли $so(n)$ определяется аналогично.

1.1 Интегрируемые нелинейные уравнения

По ходу изложения наших исследований, по мере необходимости, будем приводить определения используемых терминов.

Определение 5 [45]. Нелинейное эволюционное уравнение (НЭУ) называется *интегрируемым*, если существует пара матриц $U, V \in M(n, \mathrm{C})$, для которых заданное НЭУ является условием совместности следующей системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \Phi(x,t,\lambda)_x &= U(x,t,\lambda)\Phi(x,t,\lambda), \\ \Phi(x,t,\lambda)_t &= V(x,t,\lambda)\Phi(x,t,\lambda), \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

где $\Phi(x,t,\lambda) \in GL(n,C),\ \lambda \in C.$

Здесь $M(n,\mathrm{C})$ - пространство всех матриц размерности *n*х*n*, $GL(n,C)$ - совокупность невырожденных матриц.

Условие совместности для системы (1.1.1) выглядит так:

$$U_t + V_x + [U,V] = 0,$$

где $[U,V] = UV - VU$ - коммутатор.

Отметим, что для каждого ИНУ характерна своя U,V пара, называемая парой Лакса.

В качестве первого примера ИНУ возьмем НУШ [46-57].

Пример 1. Рассмотрим НУШ, которое описывает огибающий волновой пакет в среде с дисперсией и кубической нелинейностью и имеет следующий вид

$$iq_t + q_{xx} + 2\bar{q}q^2 = 0, \tag{1.1.2}$$

где $q(x,t) \in S(R)$ - комплекснозначная волновая функция, $\bar{q}(x,t)$ означает комплексное сопряжение, $S(R)$ - пространство Шварца.

Пара Лакса, соответствующее НУШ (1.1.2) выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi_{1x} &= U_1\Phi_1 \\ \Phi_{1t} &= V_1\Phi_1, \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= -i\lambda\sigma_3 + Q, \\ V_1 &= -2i\lambda^2\sigma_3 + \lambda Q + V_0. \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Здесь $\Phi \in SU(2)$, матрицы $U_1, V_1 \in su(2), \quad \forall\lambda \in C$ и

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q \\ \bar{q} & 0 \end{pmatrix}, \quad V_0 = i\begin{pmatrix} -\bar{q}q & q_x \\ -\bar{q}_x & \bar{q}q \end{pmatrix}.$$

Условие нулевой кривизны

$$U_{1t} + V_{1x} + [U_1, V_1] = 0$$

получается из условии совместности $\Phi_{1xt} = \Phi_{1tx}$ системы (1.1.3).

Следующим примером ИНУ является УФГ [58-63].

Пример 2. Рассмотрим УФГ, которое описывает процесс намагниченности в магнетиках и имеет вид

$$\vec{S}_t = \vec{S} \wedge \vec{S}_{xx}. \tag{1.1.5}$$

Здесь, $\vec{S}(x,t) = (S_1(x,t), S_2(x,t), S_3(x,t))$ - трехкомпонентный спиновый вектор, область значения находится на поверхности единичной сферы $S(x,t) \in R^3$. «$\wedge$» - означает векторное произведение и

$$\vec{S}^{\,2} = \sum_{i=1}^{3} S_i^2(x) = 1.$$

Эквивалентная матричная форма УФГ (1.1.5) задается в виде

$$S_t = \frac{1}{2i}\left[S, S_{xx}\right], \tag{1.1.6}$$

где S - спиновая матрица, матричный аналог спинового вектора $\vec{S}$, причем,

$$S = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix}, \; S^2 = I, \; S^{\pm} = S_1 \pm iS_2.$$

Спиновая матрица обладает следующими свойствами:

$$S = (\vec{S}, \vec{\sigma}), \quad S = \bar{S}^T, \quad Tr\, S = 0,$$

где компонентами $\vec{\sigma}$ вектора являются матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пара Лакса, соответствующее УФГ (1.1.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_{2x} &= U_2 \Phi_2 \\ \Phi_{2t} &= V_2 \Phi_2. \end{aligned}$$

Здесь матрицы U_2, V_2 связаны с уравнением (1.1.6), как

$$\begin{aligned} U_2 &= -i\lambda S, \\ V_2 &= -2i\lambda^2 S + \lambda S S_x, \end{aligned}$$

а условие нулевой кривизны имеет вид

$$U_{2t} + V_{2x} + [U_2, V_2] = 0.$$

Эти два интегрируемых нелинейных уравнения являются объектами исследования данной диссертационной работы.

1.2 Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга

Определение 6 [64]. Если существует точное преобразование, позволяющее перейти от одного НЭУ к другому и обратно, тогда такие НЭУ называются *эквивалентными*.

В теории интегрируемых нелинейных уравнений известны два таких преобразований:

1) калибровочное преобразование;
2) геометрическое преобразование.

Определение 7 [65]. Две системы нелинейных уравнений называются *калибровочно- эквивалентными*, если

$$\begin{aligned} U_1 &= g U_2 g^{-1} + g_x g^{-1}, \\ V_1 &= g V_2 g^{-1} + g_t g^{-1}, \end{aligned}$$

где $g(x,t) \in GL(n,C)$. Ясно, что при этом в соответствующих системах линейных дифференциальных уравнений $\Phi_1 = g\Phi_2$.

Калибровочная эквивалентность между НУШ и УФГ была установлена В.Е. Захаровым и Л.А. Тахтаджяном в 1979 г. [65, p.17-22].

Прежде, чем привести определение геометрической эквивалентности, рассмотрим сведение об уравнений, которое в дальнейшем нам понадобится.

Пусть дано уравнение Серре-Френе (УСФ). Оно является представителем дифференциальной геометрии.

УСФ описывает движение пространственных кривых и имеет вид [66, 67]:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}_x = C\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \text{ и } \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}_t = D\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \tag{1.2.1}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & \sigma \\ -\kappa & 0 & \tau \\ -\sigma & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & \omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C, D \in so(3).$$

Здесь, κ и σ геодезическая и нормальная кривизны пространственной кривой, τ - ее кручение, а $\omega_j\ (j=1,2,3)$ - искомые функции, которые будут выражаться через κ, σ, τ .

Условие нулевой кривизны

$$C_t - D_x + [C, D] = 0 \tag{1.2.2}$$

получается из условия совместности $\vec{e}_{jxt} = \vec{e}_{jtx}$ УСФ (1.2.1).

Теперь приведем определение геометрической эквивалентности.

Определение 8 [38, p.354-356]. Если $\vec{e}_1 \equiv \vec{S}$ и $\sigma = 0$, где $\vec{e}_1$ -один из базисных векторов $\vec{e}_j\ (j=1,2,3)$, которое удовлетворяет УСФ и $\vec{S}$ -спин вектор, то НУШ и УФГ называются *геометрически эквивалентными*.

Геометрическая эквивалентность между НУШ и УФГ была доказана М.Лакшмананом в 1978 г. [38, p.354-355].

Вопрос: Что мы получим, если применим изоморфизм алгебр Ли $su(2) \cong so(3)$ к матрицам $U_1,\ V_1 \in su(2)$ и $C,\ D \in so(3)$?

Ответ: Мы получаем эквивалентность между НЭУ, которую сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Если связь элементов матриц $U_1, V_1 \in su(2)$ *НУШ (1.1.2) с элементами матриц* $C, D \in so(3)$ *УСФ (1.2.1) имеет вид*

$$\begin{aligned} \tau &= -i(\bar{q}+q), \\ \sigma &= \bar{q}-q, \\ \kappa &= -2\lambda, \\ \omega_1 &= -\sigma_x - \kappa\tau, \\ \omega_2 &= \tau_x - \kappa\sigma, \\ \omega_3 &= \frac{1}{2}\left(\tau^2+\sigma^2\right)-\kappa^2, \end{aligned}$$

тогда НУШ (1.1.2) и УФГ (1.1.5) являются эквивалентными между собой.

Доказательство. Для начало построим базисы алгебр Ли.

Базисы $l_j\,(j=1,2,3)$ алгебры $su(2)$ выражаются как

$$l_j = \frac{1}{2i}\sigma_j.$$

Здесь $\sigma_j\,(j=1,2,3)$ - матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эти базисные матрицы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[l_1,l_2]=l_3, \quad [l_2,l_3]=l_1, \quad [l_3,l_1]=l_2.$$

Разложим матрицу $U_1(x,t)\in su(2)$ по базисам алгебры $su(2)$ в виде

$$U_1 = \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3, \tag{1.2.3}$$

где $\gamma_j\,(j=1,2,3)$ - неизвестные коэффициенты, которые нужно найти.

Тогда имеем

$$U_1 = \frac{1}{2i}\gamma_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2i}\gamma_2\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2i}\gamma_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix}\gamma_3 & \gamma_1 - i\gamma_2\\ \gamma_1 + i\gamma_2 & -\gamma_3\end{pmatrix}. \tag{1.2.4}$$

U_1 в (1.1.4) выглядит следующим образом:

$$U_1 = -i\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & q\\ \bar{q} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\lambda & q\\ \bar{q} & i\lambda\end{pmatrix}. \tag{1.2.5}$$

Приравнивая (1.2.4) и (1.2.5), получаем выражения для $\gamma_j\ (j = 1,2,3)$ в виде

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= i(\bar{q} + q)\\ \gamma_2 &= \bar{q} - q\\ \gamma_3 &= 2\lambda.\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

Следовательно, переписав (1.1.4), получаем

$$U_1 = i(\bar{q} + q)l_1 + (\bar{q} - q)l_2 + 2\lambda l_3.$$

Теперь аналогично разложим матрицу $V_1 \in su(2)$ по базисным матрицам $l_j\,(j = 1,2,3)$ алгебры $su(2)$:

$$V_1 = z_1 l_1 + z_2 l_2 + z_3 l_3.$$

Здесь $z_j\ (j = 1,2,3)$ - искомые коэффициенты, которые должны выражаться через $q, \bar{q}$ и λ.

Имеем

$$V_1 = \frac{1}{2i}z_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2i}z_2\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2i}z_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix}z_3 & z_1 - iz_2\\ z_1 + iz_2 & -z_3\end{pmatrix}. \tag{1.2.7}$$

V_1 из (1.1.4) выглядит следующим образом

$$V_1 = -2i\lambda^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+2\lambda\begin{pmatrix}0 & q\\ \bar{q} & 0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-\bar{q}q & q_x\\ -\bar{q}_x & \bar{q}q\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2i\lambda^2-i\bar{q}q & 2\lambda q+iq_x\\ 2\lambda\bar{q}-i\bar{q}_x & 2i\lambda^2+i\bar{q}q\end{pmatrix}. \tag{1.2.8}$$

Приравнивая уравнения (1.2.7) и (1.2.8), получаем

$$\begin{aligned} z_1 &= 2i\lambda(\bar{q}+q)+(\bar{q}_x-q_x)\\ z_2 &= 2\lambda(\bar{q}-q)-i(\bar{q}_x+q_x)\\ z_3 &= 4\lambda^2+2\bar{q}q. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(2i\lambda(\bar{q}+q)+(\bar{q}_x-q_x)\right)l_1\\ &+ \left(2\lambda(\bar{q}-q)-i(\bar{q}_x+q_x)\right)l_2+\left(4\lambda^2+2\bar{q}q\right)l_3. \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

Разложим матрицу $C\in so(3)$ из УСФ (1.2.1) в виде

$$C=\begin{pmatrix}0 & \kappa & \sigma\\ -\kappa & 0 & \tau\\ -\sigma & -\tau & 0\end{pmatrix}=-\tau L_1+\sigma L_2-\kappa L_3. \tag{1.2.10}$$

Здесь, $L_j\,(j=1,2,3)$ - базисы алгебры $so(3)$ и

$$L_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad L_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad L_3=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Эти базисные матрицы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[L_1,L_2]=L_3,\quad [L_2,L_3]=L_1,\quad [L_3,L_1]=L_2.$$

Аналогично разложению (1.2.10), матрица $D \in so(3)$ также можно раскладывать по базисным матрицам как

$$D \quad = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & \omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ -\omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} = -\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 - \omega_3 L_3. \tag{1.2.11}$$

Теперь перейдем от $l_j \in su(2)$ к $L_j \in so(3)$ и от $U_1, V_1 \in su(2)$ к $C, D \in so(3)$. Так как базисы $l_j \in su(2)$ и $L_j \in so(3)$ удовлетворяют одинаковым коммутационным соотношениям и все коэффициенты равны 1, мы можем использовать свойству изоморфизма $su(2) \cong so(3)$ алгебр Ли для матриц U_1 (1.2.3) и C (1.2.10), получаем

$$\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 \cong \gamma_1 L_1 + \gamma_2 L_2 + \gamma_3 L_3.$$

Тогда, с учетом (1.2.6) и (1.2.10), имеем

$$i(r+q)L_1 + (r-q)L_2 + 2\lambda L_3 = -\tau L_1 + \sigma L_2 - \kappa L_3.$$

В итоге мы получаем следующие связи между элементами матриц U_1 и C

$$\begin{aligned} \tau &= -i(\bar{q}+q) \\ \sigma &= \bar{q}-q \\ \kappa &= -2\lambda. \end{aligned}$$

Аналогичный подход для матриц V_1 и D:

$$z_1 L_1 + z_2 L_2 + z_3 L_3 \quad = -\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 - \omega_3 L_3$$

или, с учетом (1.1.15) и (1.1.17), последнее равенство перепишем в виде

$$\begin{aligned} &\left(2i\lambda(\bar{q}+q) + (\bar{q}-q)_x\right)L_1 + \left(2\lambda(\bar{q}-q) - i(\bar{q}+q)_x\right)L_2 \\ &+ \left(4\lambda^2 + 2\bar{q}q\right)L_3 = -\omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 - \omega_3 L_3 \end{aligned}.$$

Отсюда имеем следующие выражения для функций $\omega_j \, (j = 1,2,3)$:

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= -\sigma_x - \kappa\tau \\
\omega_2 &= \tau_x - \kappa\sigma \\
\omega_3 &= \frac{1}{2}\left(\tau^2 + \sigma^2\right) - \kappa^2.
\end{aligned}
$$

Нетрудно вывести уравнения для κ, τ и σ из (1.2.2) в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
\kappa_t &= \omega_{3x} - \tau\omega_2 + \sigma\omega_1 \\
\sigma_t &= \omega_{2x} - \kappa\omega_1 + \tau\omega_3 \\
\tau_t &= \omega_{1x} - \sigma\omega_3 + \kappa\omega_2.
\end{aligned}
$$

Для удобства, перепишем УСФ (1.2.1) по компонентам:

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_{1x} &= \kappa\vec{e}_2 + \sigma\vec{e}_3 \\
\vec{e}_{2x} &= -\kappa\vec{e}_1 + \tau\vec{e}_3 \\
\vec{e}_{3x} &= -\sigma\vec{e}_1 - \tau\vec{e}_2 \\
\vec{e}_{1t} &= \omega_3\vec{e}_2 + \omega_2\vec{e}_3 \\
\vec{e}_{2t} &= -\omega_3\vec{e}_1 + \omega_1\vec{e}_3 \\
\vec{e}_{3t} &= -\omega_2\vec{e}_1 - \omega_1\vec{e}_2.
\end{aligned}
\tag{1.2.12}
$$

Находим производную по x из третьего уравнения (1.2.12). Получаем

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_{3xx} &= \left(-\sigma\vec{e}_1 - \tau\vec{e}_2\right)_x = -\left(\sigma_x\vec{e}_1 + \sigma\vec{e}_{1x} + \tau_x\vec{e}_2 + \tau\vec{e}_{2x}\right) \\
&= -\left(\sigma_x\vec{e}_1 + \sigma\left(\kappa\vec{e}_2 + \sigma\vec{e}_3\right) + \tau_x\vec{e}_2 + \tau\left(-\kappa\vec{e}_1 + \tau\vec{e}_3\right)\right) \\
&= -\sigma_x\vec{e}_1 - \sigma\kappa\vec{e}_2 - \sigma^2\vec{e}_3 - \tau_x\vec{e}_2 + \tau\kappa\vec{e}_1 - \tau^2\vec{e}_3.
\end{aligned}
\tag{1.2.13}
$$

Векторное умножение (1.2.13) слева на $\vec{e}_3$ дает

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_{3xx} &= -\sigma_x\left(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1\right) + \tau\kappa\left(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1\right) - \sigma\kappa\left(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2\right) \\
&- \tau_x\left(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2\right) - \sigma^2\left(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3\right) - \tau^2\left(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3\right) \\
&= -\sigma_x\vec{e}_2 + \tau\kappa\vec{e}_2 + \sigma\kappa\vec{e}_1 + \tau_x\vec{e}_1 \\
&= -\sigma_x\vec{e}_2 + \tau_x\vec{e}_1 - \kappa\left(-\sigma\vec{e}_1 - \tau\vec{e}_2\right) \\
&= -\sigma_x\vec{e}_2 + \tau_x\vec{e}_1 - \kappa\vec{e}_{3x}.
\end{aligned}
\tag{1.2.14}
$$

Теперь из последнего уравнения (1.2.12) с учетом (1.2.14), получим уравнение вида

$$\vec{e}_{3t} + \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_{3xx} + 2\kappa\vec{e}_{3x} = 0. \qquad (1.2.15)$$

Полученное уравнение (1.2.15) является обобщенным УФГ. В частном случае, если $\lambda = 0$ и $\vec{S} \equiv \vec{e}_3$, то уравнение (1.2.15) переходит к УФГ (1.1.5). Таким образом, мы установили эквивалентность между НУШ (1.1.2) и УФГ (1.1.5). *Что и требовалось доказать.*

Однако, должны отметить, что для $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, также вывели интегрируемые уравнения.

При $\lambda = 0$ имеем, что $\kappa = 0, \quad \sigma = r - q, \quad \tau = -i(r+q)$. Тогда из (1.2.12)

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{1x} &= \sigma\vec{e}_3 \\
\vec{e}_{2x} &= \tau\vec{e}_3 \\
\vec{e}_{1t} &= \frac{1}{2}\left(\tau^2 + \sigma^2\right)\vec{e}_2 + \tau_x\vec{e}_3 \\
\vec{e}_{2t} &= -\frac{1}{2}\left(\tau^2 + \sigma^2\right)\vec{e}_1 - \sigma_x\vec{e}_3.
\end{aligned} \qquad (1.2.16)$$

Находя $\vec{e}_3$ из уравнения (1.2.16) и векторно умножая ее справа на $\vec{e}_1$, имеем

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = \frac{1}{\sigma}\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1x} = -\vec{e}_2, \qquad (1.2.17)$$

а также

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_{1xx} = \sigma_x\vec{e}_3 + \sigma\vec{e}_{3x} = \sigma_x\vec{e}_3 + \sigma(-\sigma\vec{e}_1 - \tau\vec{e}_2) \\
&= \sigma_x\vec{e}_3 - \sigma(\sigma\vec{e}_1 + \tau\vec{e}_2).
\end{aligned} \qquad (1.2.18)$$

Скалярно умножая $\vec{e}_1$ на (1.2.18), получаем

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_{1xx} &= \sigma_x\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 - \sigma^2\vec{e}_1^{\,2} - \sigma\tau\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\
&= -\sigma^2\vec{e}_1^{\,2} = -\sigma^2.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\sigma = \sqrt{-\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_{1xx}}$. Умножая слева $\vec{e}_1$ векторно на (1.2.18), находим, что

$$\frac{1}{\sigma}\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1xx} = \frac{\sigma_x}{\sigma^2}\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1x} - \frac{\tau}{\sigma}\vec{e}_{1x}.$$

или

$$\frac{\sigma_x}{\sigma^2}\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1x} - \frac{1}{\sigma}\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1xx} = \frac{\tau}{\sigma}\vec{e}_{1x}. \tag{1.2.19}$$

Далее, возводим в квадрат уравнение (1.2.16) и находим σ:

$$\sigma = \sqrt{\vec{e}_{1x}^{\,2}}.$$

Также из (1.2.16) вычисляем, что

$$\begin{aligned}\vec{e}_{1xx} &= \sigma_x\vec{e}_3 + \sigma\vec{e}_{3x} = \sigma_x\vec{e}_3 + \sigma(-\sigma\vec{e}_1 - \tau\vec{e}_2) \\ &= \sigma_x\vec{e}_3 - \sigma^2\vec{e}_1 - \sigma\tau\vec{e}_2.\end{aligned}$$

Скалярно умножим уравнение на $\vec{e}_2$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_{1xx} = \sigma_x(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) - \sigma^2(\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1) - \sigma\tau\vec{e}_2^{\,2} = -\sigma\tau.$$

Отсюда находим, что τ выражается через базисные вектора $\vec{e}_j \; (j = 1,2,3)$ в виде

$$\tau = \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_{1xx}}{-\sigma} = -\frac{\vec{e}_{1x}(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1xx})}{\vec{e}_{1x}^{\,2}}.$$

Следовательно, получаем

$$\tau = -\frac{\vec{e}_{1x}(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1xx})}{\vec{e}_{1x}^{\,2}},$$

а также умножая (1.1.25) на σ, получим

$$\frac{\sigma_x}{\sigma}\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1x} - \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1xx} = \tau\vec{e}_{1x}.$$

Следовательно,

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1x} = \frac{\sigma}{\sigma_x}\left(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1xx} + \tau\vec{e}_{1x}\right). \qquad (1.2.20)$$

Теперь для $\vec{e}_1$ в (1.2.16), принимая во внимание уравнения (1.2.16), (1.2.17), (1.2.20), получаем

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{1t} &= \frac{1}{2}\left(\tau^2 + \sigma^2\right)\vec{e}_2 + \tau_x\vec{e}_3 \\
&= -\frac{\left(\tau^2 + \sigma^2\right)}{2\sigma}\left(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1x}\right) + \frac{\tau_x}{\sigma}\vec{e}_{1x} \\
&= -\frac{\left(\tau^2 + \sigma^2\right)}{2\sigma_x}\left(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1xx} + \tau\vec{e}_{1x}\right) + \frac{\tau_x}{\sigma}\vec{e}_{1x} \\
&= -\frac{\left(\tau^2 + \sigma^2\right)}{2\sigma_x}\left(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_{1xx}\right) + \left(\frac{\tau_x}{\sigma} - \frac{\left(\tau^2 + \sigma^2\right)\tau}{2\sigma_x}\right)\vec{e}_{1x}.
\end{aligned}$$

Аналогично, получаем для $\vec{e}_2$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{\tau}\vec{e}_{2x}, \quad \vec{e}_1 = \frac{1}{\tau}\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_{2x},$$

$$\tau = \sqrt{-\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_{2xx}}, \quad \sigma = \frac{\vec{e}_{2x} \cdot (\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_{2xx})}{\vec{e}_{2x}^2}$$

и

$$\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_{2x} = \frac{\tau}{\tau_x}\left(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_{2xx} - \sigma\vec{e}_{2x}\right).$$

Из этих уравнений получаем следующее уравнение для $\vec{e}_2$:

$$\vec{e}_{2t} = -\frac{\tau^2 + \sigma^2}{2\tau_x}\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_{2xx} - \left(\frac{\sigma_x}{\tau} - \frac{(\tau^2 + \sigma^2)\sigma}{2\tau_x}\right)\vec{e}_{2x}.$$

Таким образом, преобразовывая матрицы из алгебры $su(2)$ к матрицам из $so(3)$ с использованием их свойства изоморфизма алгебр Ли, нами выведены три интегрируемые векторные уравнения для трех единичных векторов $\vec{e}_j\,(j=1,2,3)$:

$$\vec{e}_{3t}+\vec{e}_3\wedge\vec{e}_{3xx}+2\kappa\vec{e}_{3x}=0,$$

$$\vec{e}_{1t}=a_1\vec{e}_1\wedge\vec{e}_{1xx}+b_1\vec{e}_{1x},$$

$$\vec{e}_{2t}=a_2\vec{e}_2\wedge\vec{e}_{2xx}+b_2\vec{e}_{2x},$$

где $\kappa=-2\lambda,$ и

$$a_1=-\frac{\tau^2+\sigma^2}{2\sigma_x},\quad b_1=\frac{\tau_x}{\sigma}-\frac{(\tau^2+\sigma^2)\tau}{2\sigma_x},$$
$$a_2=-\frac{\tau^2+\sigma^2}{2\tau_x},\quad b_2=-\frac{\sigma_x}{\tau}+\frac{(\tau^2+\sigma^2)\sigma}{2\tau_x}.$$

Напоминаем, что уравнение для вектора $\vec{e}_3$ совпадает с уравнением (1.2.15), которое является хорошо известным интегрируемым УФГ (1.1.5) при $\lambda=0,$ с отождествлением $\vec{S}\equiv\vec{e}_3$.

На этом мы завершаем демонстрацию применения алгебро-геометрического подхода к НУШ (1.1.2) и УФГ (1.1.5).

Из представленной нами геометрической формулировки для двух интегрируемых нелинейных уравнений, сформулируем следующее следствие:

Следствие 1. Если матрицы $U,V\in su(2)$ являются парой Лакса, соответствующей исследуемому интегрируемому нелинейному уравнению, а $C,D\in so(3)$ – матрицы из УСФ, тогда:

1. Матрица $U\in su(2)$ раскладывается по базисным матрицам как

$$U=\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & -u_{11}\end{pmatrix}=a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3$$

$$=\frac{a_1}{2i}\sigma_1+\frac{a_2}{2i}\sigma_2+\frac{a_3}{2i}\sigma_3$$

$$=\frac{1}{2i}\begin{pmatrix}a_3 & a_1-ia_2\\ a_1+ia_2 & -a_3\end{pmatrix}. \tag{1.2.21}$$

Из уравнения (1.2.21), имеем

$$a_3 = 2iu_{11},$$
$$a^+ = a_1 + ia_2 = 2iu_{21},$$
$$a^- = a_1 - ia_2 = 2iu_{12},$$

или

$$a_1 = i(u_{21} + u_{12}),$$
$$a_2 = u_{21} - u_{12},$$
$$a_3 = 2iu_{11}.$$

2. Для матрицы $V \in su(2)$ имеем

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & -v_{11} \end{pmatrix} = b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3$$

$$= \frac{b_1}{2i}\sigma_1 + \frac{b_2}{2i}\sigma_2 + \frac{b_3}{2i}\sigma_3$$

$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & -b_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$b_3 = 2iv_{11},$$
$$b^+ = b_1 + ib_2 = 2iv_{21},$$
$$b^- = b_1 - ib_2 = 2iv_{12},$$

или

$$b_1 = i(v_{21} + v_{12}),$$
$$b_2 = v_{21} - v_{12},$$
$$b_3 = 2iv_{11}.$$

3. Между элементами матриц U, V и C, D имеется следующая связь:

$$a_1 = -\tau,\, a_2 = \sigma,\, a_3 = -\kappa,$$
$$b_1 = -\omega_1,\, b_2 = \omega_2,\, b_3 = -\omega_3,$$

или

$$\tau = -i(u_{21} + u_{12}),$$
$$\sigma = u_{21} - u_{12},$$
$$\kappa = -2iu_{11},$$
$$\omega_1 = -i(v_{21} + v_{12}),$$
$$\omega_2 = v_{21} - v_{12},$$
$$\omega_3 = -2iv_{11}.$$

4. Уравнение (1.2.15) является общим видом спиновой системы. Ее конкретный вид зависит от принимаемого значения кривизны κ.

1.3 Уравнение Чена – Ли – Лю и его эквивалентная спиновая система

В этом разделе мы применим *следствие1* пункта 1.1 по алгебро-геометрическому подходу установления геометрической эквивалентности между более сложными интегрируемыми нелинейными уравнениями. Одним из представителей таких уравнений Шредингерского типа является уравнение Чена – Ли – Лю (УЧЛЛ) [68, 69]:

$$iq_t + q_{xx} + 2rqq_x = 0. \tag{1.3.1}$$

УЧЛЛ (1.3.1) ассоциируется со следующей линейной системой:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= U_3\Phi, \\ \Phi_t &= V_3\Phi. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Здесь матрицы Лакса U_3 и V_3 имеют вид

$$\begin{aligned} U_3 &= \left(-i\lambda^2 - \frac{i}{4}rq\right)\sigma_3 + \lambda Q, \\ V_3 &= \left[-2i\lambda^4 - irq\lambda^2 - \frac{1}{4}(r_x q - rq_x) - \frac{i}{8}r^2q^2\right]\sigma_3 + 2\lambda^3 Q + \lambda P, \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

где

$$Q=\begin{pmatrix}0 & q\\ r & 0\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0 & iq_x+\frac{1}{2}rq^2\\ -ir_x+\frac{1}{2}r^2q & 0\end{pmatrix}.$$

Из условии совместности линейных уравнений (1.3.2), получим условию нулевой кривизны

$$U_{3t}-V_{3x}+[U_3,V_3]=0,$$

что в компонентах матрицы U_3 и V_3 дает УЧЛЛ

$$\begin{aligned}&iq_t+q_{xx}+2rq^2=0,\\ &ir_t-r_{xx}-2r^2q=0,\end{aligned}$$

где $r(x,t)=k\overline{q}(x,t)$ с $k=\pm 1$.

Другой представитель интегрируемых нелинейных уравнений – это спиновая система, являющейся обобщенным УФГ (ОУФГ) следующего вида

$$\vec{S}_t+\vec{S}\wedge\vec{S}_{3xx}-\left(2\beta^2-\frac{1}{8\beta^2}\vec{S}_x^2\right)\vec{S}_x=0.$$

Пусть матричная форма ОУФГ имеет вид

$$iS_t+\frac{1}{2}[S,S_{xx}]-\frac{i}{4\beta^2}\vec{S}_x^2S_x=0. \tag{1.3.4}$$

Система линейных уравнений, связанная с уравнением (1.3.4), читается как

$$\begin{aligned}\Psi_x&=U_4\Psi,\\ \Psi_t&=V_4\Psi,\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

где пара Лакса U_4, V_4 - неизвестны, и нам нужно найти их таким образом, чтобы они удовлетворяли условию нулевой кривизны:

$$U_{4t}-V_{4x}+[U_4,V_4]=0. \tag{1.3.6}$$

Теорема 2. Если связь элементов матриц $U_3(x,t),V_3(x,t)\in su(2)$ *УЧЛЛ (1.3.1) с элементами матриц* $C,D\in so(3)$ *УСФ (1.2.1) имеет следующий вид*

$$\begin{aligned}
\kappa &= -(2\lambda^2+\frac{qr}{2}),\\
\sigma &= \lambda(r-q),\\
\tau &= -i\lambda(r+q),\\
\omega_3 &= -4\lambda^4-2rq\lambda^2+\frac{i}{2}(r_xq-rq_x)+\frac{i}{4}r^2q^2,\\
\omega_2 &= 2\lambda^3(r-q)-i\lambda(r_x+q_x)+\frac{\lambda}{2}rq(r-q),\\
\omega_1 &= -\left(2i\lambda^3(r+q)+\lambda(r_x-q_x)+\frac{i\lambda}{2}rq(r+q)\right)
\end{aligned}$$

с

$$r=\frac{\sigma+i\tau}{2\lambda},\quad q=-\frac{\sigma-i\tau}{2\lambda}.$$

Тогда УЧЛЛ (1.3.1) и ОУФГ (1.3.4) являются эквивалентными между собой.

Прежде чем привести доказательство теоремы об эквивалентности ИНУ с помощью свойства изоморфизма алгебр Ли, покажем калибровочную эквивалентность этих уравнений. Это необходимо для проверки справедливости нашего метода.

Рассмотрим калибровочное преобразование

$$\Psi=h^{-1}\Phi, \tag{1.3.7}$$

где Ψ - решение спектральной задачи (1.3.5), Φ - решение линейной системы (1.3.2), $h=\Phi|_{\lambda=\beta}$, $\beta=const.$

От преобразования (1.3.7) берем производную по x:

$$\begin{aligned}
\Psi_x &= \left(h^{-1}\Phi\right)_x = h^{-1}\Phi_x-h^{-1}h_xh^{-1}\Phi = h^{-1}U_3\Phi-h^{-1}U_{03}\Phi=\\
&= h^{-1}[U_3-U_{03}]\Phi = h^{-1}[U_3-U_{03}]h\Psi = U_4\Psi,
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

где $U_{03}=U_3|_{\lambda=\beta}$. Из (1.3.3), в случае $\lambda=\beta$, получим

$$U_3 - U_{03} = \left(-i\lambda^2 - \frac{i}{4}rq\right)\sigma_3 + \lambda Q - \left(-i\beta^2 - \frac{i}{4}rq\right)\sigma_3 - \beta Q =$$

$$= -i\left(\lambda^2 - \beta^2\right)\sigma_3 + (\lambda - \beta)Q.$$

Введем обозначения

$$S = h^{-1}\sigma_3 h = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} |h_1|^2 - |h_2|^2 & -2\bar{h}_1\bar{h}_2 \\ -2h_1h_2 & |h_2|^2 - |h_1|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+|w|^2}\begin{pmatrix} 1-|w|^2 & 2\bar{w} \\ 2w & |w|^2 - 1 \end{pmatrix}, \tag{1.3.9}$$

где

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & -\bar{h}_2 \\ h_2 & \bar{h}_1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = |h_1|^2 + |h_2|^2, \quad w = -\frac{h_2}{\bar{h}_1}.$$

Здесь (1.3.9), очевидно, удовлетворяет условиям

$$S = \sum_{j=1}^{3} S_j \sigma_j, S^2 = I.$$

$H = (h_1, h_2)^T$ - решение системы (1.3.5), и спиновая матрица S в компонентах записываются в виде

$$S = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix}$$

и

$$S^+ = -\frac{2h_1h_2}{\Delta}, \quad S^- = -\frac{2\bar{h}_1\bar{h}_2}{\Delta}, \quad S_3 = \frac{|h_1|^2 - |h_2|^2}{\Delta}$$

или

$$S^{+}=\frac{2w}{1+|w|^{2}},\quad S^{-}=\frac{2\overline{w}}{1+|w|^{2}},\quad S_{3}=\frac{1-|w|^{2}}{1+|w|^{2}}. \tag{1.3.10}$$

Если взять компоненты матрицы S через угловое представление в виде

$$S^{+}=e^{i\varphi}\sin\theta,\quad S^{-}=e^{-i\varphi}\sin\theta,\quad S_{3}=\cos\theta, \tag{1.3.11}$$

тогда приравнивая (1.3.10) к (1.3.11), получим

$$w=e^{i\varphi}\tan\frac{\theta}{2}.$$

Берем производную от (1.3.9):

$$S_{x}=\left(h^{-1}\sigma_{3}h\right)_{x}=h^{-1}\left[\sigma_{3},h_{x}h^{-1}\right]h=\beta h^{-1}\left[\sigma_{3},Q\right]h=2\beta Sh^{-1}Qh, \tag{1.3.12}$$

и вычислим

$$S_{x}^{2}=4\beta^{2}h^{-1}\begin{pmatrix}-rq & 0\\ 0 & -rq\end{pmatrix}h=-4\beta^{2}rqI=\vec{S}_{x}^{2}I.$$

След последнего уравнения дает

$$tr\left(S_{x}^{2}\right)=-8\beta^{2}rq=2\vec{S}_{x}^{2}$$

или

$$rq=-\frac{1}{8\beta^{2}}tr\left(S_{x}^{2}\right)=-\frac{1}{4\beta^{2}}\vec{S}_{x}^{2}. \tag{1.3.13}$$

Из уравнения (1.3.12), имеем

$$2\beta h^{-1}Qh=SS_{x}$$

или

$$h^{-1}Qh = \frac{1}{2\beta} SS_x = \frac{1}{4\beta}[S, S_x].$$

Теперь, учитывая (1.3.8) и (1.3.10), окончательно можно записать матрицу U_4 в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_4 &= h^{-1}(U_3 - U_{03})h = -i(\lambda^2 - \beta^2)S + (\lambda - \beta)h^{-1}Qh \\ &= -i(\lambda^2 - \beta^2)S + \frac{\lambda - \beta}{2\beta} SS_x. \end{aligned}$$

Для удобства дальнейших вычислений представим U_4 как многочлен второй степени по λ в виде

$$U_4 = \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0,$$

где

$$\begin{aligned} A_2 &= -iS, \\ A_1 &= \frac{1}{4\beta}[S, S_x] = \frac{1}{2\beta} SS_x, \\ A_0 &= i\beta^2 S - \frac{1}{2} SS_x. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$V_4 = h^{-1}(V_3 - V_{03})h$$

$$= \left[-2i(\lambda^4 - \beta^4) - irq(\lambda^2 - \beta^2)\right]S +$$

$$+ 2(\lambda^3 - \beta^3)h^{-1}Qh + (\lambda - \beta)h^{-1}Ph.$$

Последний член этого соотношения также должен быть выражен через матрицу S. Нетрудно убедиться, что

$$h^{-1}Ph = iSh^{-1}Q_x h + \frac{rq}{4\beta} SS_x. \tag{1.3.14}$$

Затем, чтобы выразить $h^{-1}Q_x h$ через S, находим производную S_x в (1.3.12) по x как

$$S_{xx} = 2\beta\left(Sh^{-1}Qh\right)_x = \frac{2\beta}{2\beta}\left[S \cdot SS_x\right]_x$$
$$= -S_x^2 S + 2\left(i\beta^2 + \frac{i}{4}rq\right)SS_x + 2\beta S\left(h^{-1}Q_x h\right). \quad (1.3.15)$$

Таким образом, получаем

$$h^{-1}Q_x h = \frac{1}{2\beta}\left(SS_{xx} + S_x^2 - 2\left(i\beta^2 + \frac{i}{4}rq\right)S_x\right). \quad (1.3.16)$$

Подставляя (1.3.16) в (1.3.14), получаем соотношение

$$h^{-1}Ph = \frac{rq}{4\beta}SS_x + \frac{i}{2\beta}\left(S_{xx} + S_x^2 S - 2i\left(\beta^2 + \frac{rq}{4}\right)SS_x\right)$$
$$= \frac{i}{2\beta}\left(S_{xx} + SS_x^2\right) + \left(\beta + \frac{rq}{2\beta}\right)SS_x. \quad (1.3.17)$$

Наконец, нами выведено следующее выражение для матрицы V_4:

$$V_4 = \left[-2i\left(\lambda^4 - \beta^4\right) - irq\left(\lambda^2 - \beta^2\right)\right]S + \frac{\lambda^3 - \beta^3}{\beta}SS_x$$
$$+ \frac{i}{2\beta}(\lambda - \beta)\left(S_{xx} + S_x^2 S\right) + (\lambda - \beta)\left(\beta + \frac{rq}{2\beta}\right)SS_x. \quad (1.3.18)$$

Для удобства дальнейших вычислений, уравнение (1.3.18) можно переписать в виде

$$V_4 = \lambda^4 B_4 + \lambda^3 B_3 + \lambda^2 B_2 + \lambda B_1 + B_0, \quad (1.3.19)$$

где

$$
\begin{aligned}
B_4 &= -2iS, \\
B_3 &= \frac{1}{\beta} SS_x, \\
B_2 &= -irqS, \\
B_1 &= \frac{i}{2\beta}\left(S_{xx} + S_x^2 S\right) + \left(\beta + \frac{rq}{2\beta}\right) SS_x, \\
B_0 &= \left(2i\beta^4 + 3i\beta^2 rq\right) S - \frac{i}{2} S_{xx} - \left(2\beta^2 + \frac{rq}{2}\right) SS_x.
\end{aligned}
$$

Левая часть условия нулевой кривизны (1.3.6) является многочленом шестой степени от λ. Коэффициенты при соответствующих степенях λ имеют вид

$$
\begin{aligned}
\lambda^6 &: \quad [A_2, B_4] = 0, \\
\lambda^5 &: \quad [A_2, B_3] + [A_1, B_4] = 0, \\
\lambda^4 &: \quad B_{4x} - [A_2, B_2] - [A_1, B_3] - [A_0, B_4] = 0, \\
\lambda^3 &: \quad B_{3x} - [A_2, B_1] - [A_1, B_2] - [A_0, B_3] = 0, \\
\lambda^2 &: \quad A_{2t} - B_{2x} + [A_2, B_0] + [A_1, B_1] + [A_0, B_2] = 0, \\
\lambda^1 &: \quad A_{1t} - B_{1x} + [A_1, B_0] + [A_0, B_1] = 0, \\
\lambda^0 &: \quad A_{0t} - B_{0x} + [A_0, B_0] = 0.
\end{aligned}
$$

Коэффициенты степеней λ^6, λ^5 и λ^4 тождественно зануляются, а коэффициент при степенях λ^3 дает выражение

$$
(SS_x)_x = \frac{1}{2}[S, S_{xx}] - irq(1+\beta^2) S_x .
$$

Коэффициент при степени λ^2 порождает ОУФГ (1.3.4). Коэффициент при постоянном члене с коэффициентом λ^1 также дает уравнение (1.3.4). Таким образом, мы показали, что существует калибровочная эквивалентность между УЧЛЛ (1.3.1) и ОУФГ (1.3.4).

Далее, применим доказательство теоремы1.2.

Доказательство. Далее, мы проиллюстрируем алгебро-геометрический подход, представленный нами в пункте 1.1, для УЧЛЛ (1.3.1) и ОУФГ (1.3.4).

Используя наш вывод для пары Лакса U_3, V_3 имеем

$$\begin{aligned}
&U_3 = i(r+q)l_1 + (r-q)l_2 - 2\lambda l_3,\\
&V_3 = (2i\lambda(r+q) + (r-q)_x)l_1 + (2\lambda(r-q) - i(r+q)_x)l_2 + (4\lambda^2 + 2rq)l_3.
\end{aligned} \tag{1.3.20}$$

Тогда, переходя от $U_3, V_3 \in su(2)$ к $C, D \in so(3)$ через изоморфизм алгебр Ли $su(2) \cong so(3)$, для функций $\kappa, \sigma, \tau, \omega_j\,(j = 1,2,3)$ получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\kappa &= -(2\lambda^2 + \frac{qr}{2}),\\
\sigma &= \lambda(r-q),\\
\tau &= -i\lambda(r+q),\\
\omega_3 &= -4\lambda^4 - 2rq\lambda^2 + \frac{i}{2}(r_x q - rq_x) + \frac{i}{4}r^2 q^2,\\
\omega_2 &= 2\lambda^3(r-q) - i\lambda(r_x + q_x) + \frac{\lambda}{2}rq(r-q),\\
\omega_1 &= -\left(2i\lambda^3(r+q) + \lambda(r_x - q_x) + \frac{i\lambda}{2}rq(r+q)\right).
\end{aligned}$$

В то же время

$$r = \frac{\sigma + i\tau}{2\lambda}, \quad q = -\frac{\sigma - i\tau}{2\lambda}.$$

Теперь из УСФ (1.2.1), используя (1.3.15)-(1.3.20), для любого $\lambda = \beta, \beta = const,$ где β является вещественной константой, получим следующее уравнение:

$$\vec{e}_{3t} + \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_{3xx} - \left(2\lambda^2 - \frac{1}{8\lambda^2}\vec{e}_{3x}^{\,2}\right)\vec{e}_{3x} = 0. \tag{1.3.21}$$

Уравнение (1.3.21) с учетом (1.3.13) и отождествления $\vec{S} \equiv \vec{e}_3$ принимает вид

$$\vec{S}_t + \vec{S} \wedge \vec{S}_{3xx} - \left(2\beta^2 - \frac{1}{8\beta^2}\vec{S}_x^{\,2}\right)\vec{S}_x = 0,$$

которое в матричной форме становится точно таким же, как (1.3.4). *Что и требовалось доказать.*

1.4 Односолитонное решение обобщенного уравнения ферромагнетика Гейзенберга

Теперь мы хотим построить односолитонное решение ОУФГ (1.3.4). Для его построения, рассмотрим точное решение УЧЛЛ (1.3.1) вида $r = q = 0$. Тогда соответствующая линейная система (1.3.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi_{0x} &= -i\lambda^2\sigma_3\Phi_0, \\ \Phi_{0t} &= -2i\lambda^4\sigma_3\Phi_0, \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

где

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \phi_{01} & -\bar{\phi}_{02} \\ \phi_{02} & \bar{\phi}_{01} \end{pmatrix}, \quad \Phi_0^{-1} = \frac{1}{\det\Phi_0}\begin{pmatrix} \bar{\phi}_{01} & \bar{\phi}_{02} \\ -\phi_{02} & \phi_{01} \end{pmatrix}, \quad \det\Phi_0 = |\phi_{01}|^2 + |\phi_{02}|^2 .$$

Соответствующее решение линейных уравнений (1.4.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \phi_{01} &= c_1 e^{-\chi} = c_1 e^{-i\left(\lambda^2 x + 2\lambda^4 t + \delta_1\right)}, \\ \phi_{02} &= c_2 e^{\chi + i\delta_{21}} = c_2 e^{i\left(\lambda^2 x + 2\lambda^4 t + \delta_2\right)}, \end{aligned} \tag{1.4.2}$$

где $c_j\ (j = 1,2)$ являются комплексными константами, $\chi = \chi_1 + i\chi_2 = i(\lambda^2 x + 2\lambda^4 t + \delta_1),\quad \delta_{21} = \delta_2 - \delta_1,\quad \lambda = \alpha + i\beta$ и $\delta_j (j = 1,2,3), \alpha, \beta$ являются действительными константами. Для спиновой матрицы S имеем

$$S = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix} = \Phi_0^{-1}\sigma_3\Phi_0 = \begin{pmatrix} |\phi_{01}|^2 - |\phi_{02}|^2 & -2\bar{\phi}_{01}\bar{\phi}_{02} \\ -2\phi_{01}\phi_{02} & |\phi_{02}|^2 - |\phi_{01}|^2 \end{pmatrix}.$$

Для компонент спиновой матрицы S получаем следующие выражения:

$$S_3 = \frac{|\phi_{01}|^2 - |\phi_{02}|^2}{\det\Phi_0}, \quad S^+ = -\frac{2\phi_{01}\phi_{02}}{\det\Phi_0}. \tag{1.4.3}$$

Подставляя выражения (1.4.2) для функций ϕ_{oj} в формуле (1.4.3), получаем односолитонное решение спиновой системы (1.3.4) в виде

$$S_3 = \frac{|c_1|^2 e^{-2\chi_1} - |c_2|^2 e^{2\chi_1}}{|c_1|^2 e^{-2\chi_1} + |c_2|^2 e^{2\chi_1}}, \quad S^+ = -\frac{2c_1c_2e^{i\delta_{21}}}{|c_1|^2 e^{-2\chi_1} + |c_2|^2 e^{2\chi_1}}.$$

или

$$S_3 = -\tanh(2\chi_1) = 1 - \frac{e^{2\chi_1}}{|c_1|\cosh(2\chi_1)},$$

$$S^+ = -\frac{e^{i(\delta_{21}+\varepsilon_1+\varepsilon_2)}}{\cosh(2\chi_1)},$$

$$S^- = \bar{S}^+,$$

где $c_j = |c_j| e^{i\varepsilon_j}$, $j = 1,2$.

Таким образом, используя калибровочную эквивалентность между УЧЛЛ и ОУФГ, мы построили 1-солитонное решение ОУФГ.

Выводы по разделу

В данном разделе нами разработан новый подход установления алгебро-геометрической эквивалентности между интегрируемыми нелинейными диффереициальными уравнениями в частных производных. Подход основан на свойстве изоморфизма алгебр Ли $su(2)$ и $so(3)$. Преимущество этого подхода, по сравнению с методом Лакшманана, состоит в том, что в нашем случае условие идентификации $\vec{S} \equiv \vec{e}_1$ заранее не требуется, а уравнение движения для $\vec{e}_3$ (1.2.12), что дает общий вид спиновых систем при постоянных значениях λ выводится естественным образом. Вид той или иной спиновой системы различается в зависимости от принимаемого значения кривизны кривой κ. Также обратим внимание, что в [38, p.354-355], где рассматривается случай $\sigma = 0, \quad \kappa \neq 0, \quad \tau \neq 0,$ и связь исследуемого уравнения с УСФ (1.2.1) задается преобразованием Хасимоты $q(x,t) = \frac{\kappa}{2} e^{i\int \tau dy}$. А в нашем исследовании, $\sigma \neq 0, \quad \kappa = 0, \quad \tau \neq 0$, и исследуемое уравнение связано с УСФ (1.2.1) формулой $q = \frac{1}{2}(\sigma - i\tau)$. Результаты исследования первой главы опубликованы в [70].

2 СИСТЕМА МАНАКОВА И ЕГО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СПИНОВЫЕ СИСТЕМЫ

Интегрируемые спиновые системы являются важным подклассом интегрируемых (солитонных) нелинейных уравнений. Они играют важную роль как в математике, так и в физике [71-76]. Если в физике, они описывают нелинейную динамику процесса намагнеченности в ферромагнетиках, тов дифференциальной геометрии, они представляют некоторые интегрируемые классы кривых и поверхностей [77-80]. Первым и наиболее известным представителем интегрируемых спиновых систем (СС) является уравнение ферромагнетика Гейзенберга (УФГ), которое имеет вид

$$\vec{A}_t + \vec{A} \wedge \vec{A}_{xx} = 0, \tag{2.1}$$

где $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ - единичный спиновый вектор, $\vec{A}^2 = 1$. Матричный вид уравнения (2.1) пишется в виде:

$$iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] = 0, \tag{2.2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A_3 & A^- \\ A^+ & -A_3 \end{pmatrix} \in su(2), \quad A^2 = I = diag(1,1), \quad A^\pm = A_1 \pm iA_2. \tag{2.3}$$

В работе [70, p.1827-1-1827-17] доказано, что УФГ (2.1) и нелинейное уравнение Шредингера

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0, \tag{2.4}$$

являются эквивалентными между собой с точки зрения дифференциальной геометрии кривых с кривизной и кручением.

Кроме того, хорошо известно, что уравнения (2.1) и (2.4) калибровочно эквивалентны друг другу [65, p.17-22]. В настоящее время уже многие интегрируемые и неинтегрируемые спиновые системы определены в работах [81-86]. Одной из таких спиновых систем является следующее уравнение с самосогласованным потенциалом:

$$iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + iuA_x = 0, \tag{2.5}$$

где $u = u(x,t)$ некоторая вещественная функция (потенциал). Модифицированный неоднородный вид уравнения (2.5) запишется в виде

$$iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + iuA_x + F = 0, \tag{2.6}$$

где $F = \begin{pmatrix} F_3 & F^- \\ F^+ & -F_3 \end{pmatrix} \in su(2)$. В данном разделе, мы изучаем двухслойное обобщение спинового уравнения (2.6).

2.1 Двухслойное спиновое уравнение (система)

Рассмотрим две спиновые матрицы A и B. Пусть эти спиновые векторы удовлетворяют связанному уравнению или двухслойному уравнению вида [87-89]:

$$\begin{aligned} iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + iu_1 A_x + F &= 0, \\ iB_t + \frac{1}{2}[B, B_{xx}] + iu_2 B_x + E &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Здесь $u_j\ (j = 1,2)$ - вещественные функции, матрица A задана в виде (2.3), B - матричный аналог спиного вектора $\vec{B}$, F и E являются матрицами:

$$B = \begin{pmatrix} B_3 & B^- \\ B^+ & -B_3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_3 & F^- \\ F^+ & -F_3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} E_3 & E^- \\ E^+ & -E_3 \end{pmatrix}, \tag{2.1.2}$$

где $B^{\pm} = B_1 \pm iB_2, \quad B^2 = I, \quad F^{\pm} = F_1 \pm iF_2, \quad E^{\pm} = E_1 \pm iE_2$. Далее представим две комплексные функции u и v как

$$u = \frac{A^+}{1 + A_3}, \quad v = \frac{B^+}{1 + B_3}.$$

Тогда эти функции удовлетворяют следующему ряду уравнений:

$$\begin{aligned} iu_t - u_{xx} + \frac{2\bar{u}u_x^2}{1 + |u|^2} &= F', \\ iv_t - v_{xx} + \frac{2\bar{v}v_x^2}{1 + |v|^2} &= E', \end{aligned}$$

где $F^{'}$ и $E^{'}$ некоторые комплексные функции

$$\begin{aligned} F^{'} &= F^{'}(u, v, u_x, v_x, ...), \\ E^{'} &= E^{'}(u, v, u_x, v_x, ...). \end{aligned}$$

Предположим, что F и E имеют вид

$$F = v_1[\sigma_3, A], \quad E = v_2[\sigma_3, B],$$

где $v_j (j = 1,2)$ - некоторые вещественные функции (потенциалы). Тогда связанные спиновые уравнения (2.1.1) примут вид

$$\begin{aligned} iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + iu_1 A_x + v_1[\sigma_3, A] &= 0, \\ iB_t + \frac{1}{2}[B, B_{xx}] + iu_2 B_x + v_2[\sigma_3, B] &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Здесь связанные потенциалы u_j и v_j $(j = 1,2)$ имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{i(\bar{Z}B^- - ZB^+)}{W(1 + B_3)}, \\ v_1 &= -\frac{|Z|^2}{2W(1 + A_3)^2}, \\ u_2 &= \frac{i(\bar{R}A^- - RA^+)(1 + B_3)}{W(1 + A_3)^2}, \\ v_2 &= -\frac{|R|^2}{2W(1 + A_3)^3}, \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

где

$$
\begin{aligned}
W &= 2+\frac{(1+A_3)(1-B_3)}{1+B_3}, \\
R &= WA_x^- - MA^-, \\
Z &= W[(1+A_3)(1+B_3)^{-1}B^-]_x - M[(1+A_3)(1+B_3)^{-1}B^-], \\
M &= A_{3x}+\frac{A^+A_x^-}{1+A_3}+\frac{A_{3x}(1-B_3)}{1+B_3}+\frac{(1+A_3)B^+B_x^-}{(1+B_3)^2}-\frac{(1+A_3)(1-B_3)B_{3x}}{(1+B_3)^2}.
\end{aligned}
\tag{2.1.5}
$$

В компонентах, двухслойное спиновое уравнение (2.1.3) запишется, как

$$
\begin{aligned}
iA_t^+ + (A^+A_{3xx} - A_{xx}^+A_3) + iu_1A_x^+ - 2v_1A^+ &= 0, \\
iA_t^- - (A^-A_{3xx} - A_{xx}^-A_3) + iu_1A_x^- + 2v_1A^- &= 0, \\
iA_{3t} + \frac{1}{2}(A^-A_{xx}^+ - A_{xx}^-A^+) + iu_1A_{3x} &= 0, \\
iB_t^+ + (B^+B_{3xx} - B_{xx}^+B_3) + iu_2B_x^+ - 2v_2B^+ &= 0, \\
iB_t^- - (B^-B_{3xx} - B_{xx}^-B_3) + iu_2B_x^- + 2v_2B^- &= 0, \\
iB_{3t} + \frac{1}{2}(B^-B_{xx}^+ - B_{xx}^-B^+) + iu_2B_{3x} &= 0
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{aligned}
A_{1t} + A_2A_{3xx} - A_{2xx}A_3 + u_1A_{1x} - 2v_1A_2 &= 0, \\
A_{2t} + A_3A_{1xx} - A_{3xx}A_1 + u_1A_{2x} - 2v_1A_1 &= 0, \\
A_{3t} + A_1A_{2xx} - A_{1xx}A_2 + u_1A_{3x} &= 0, \\
B_{1t} + B_2B_{3xx} - B_{2xx}B_3 + u_2B_{1x} - 2v_2B_2 &= 0, \\
B_{2t} + B_3B_{1xx} - B_{3xx}B_1 + u_2B_{2x} - 2v_2B_1 &= 0, \\
B_{3t} + B_1B_{2xx} - B_{1xx}B_2 + u_2B_{3x} &= 0.
\end{aligned}
$$

2.2 Двухкомпонентная система Манакова

Если в первой главе мы рассматривали однокомпонентное нелинейное уравнение Шредингера, то во второй будем исследовать двухкомпонентный случай, которое иногда называют системой (уравнением) Манакова [90, 91].

Рассмотрим систему Манакова

$$
\begin{aligned}
iq_{1t} + q_{1xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_1 &= 0, \\
iq_{2t} + q_{2xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_2 &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.2.1}
$$

Система (2.2.1) интегрируема по представлению Лакса

$$\begin{aligned} \Phi_x &= U\Phi, \\ \Phi_t &= V\Phi. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

где $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ и

$$U = -i\lambda\Sigma + U_0, \quad V = -2i\lambda^2\Sigma + 2\lambda U_0 + V_0.$$

Здесь

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} 0 & q_1 & q_2 \\ -\bar{q}_1 & 0 & 0 \\ -\bar{q}_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_0 = i\begin{pmatrix} |q_1|^2 + |q_2|^2 & q_{1x} & q_{2x} \\ \bar{q}_{1x} & -|q_1|^2 & -\bar{q}_1 q_2 \\ \bar{q}_{2x} & -\bar{q}_2 q_1 & -|q_2|^2 \end{pmatrix}.$$

2.3 Геометрически эквивалентный аналог связанного уравнения

Теорема 2.1. *Геометрически эквивалентным аналогом связанных систем Манакова (2.2.1) является следующая двухслойная спиновая система*

$$\begin{aligned} \vec{A}_t + \vec{A} \wedge \vec{A}_{xx} + u_1 \vec{A}_x + 2v_1 \vec{H} \wedge \vec{A} &= 0, \\ \vec{B}_t + \vec{B} \wedge \vec{B}_{xx} + u_2 \vec{B}_x + 2v_2 \vec{H} \wedge \vec{B} &= 0, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

где $\vec{H} = (0,0,1)$ *это постоянное магнитное поле,* u_j *и* v_j $(j = 1,2)$ *являются связанными потенциалами.*

Доказательство: Рассмотрим два спиновых вектора $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ и $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$, где $\vec{A}^2 = \vec{B}^2 = 1$. Пусть эти спиновые векторы удовлетворяют связанному или по другому названию - 2-слойному уравнению вида (2.3.1) [66, p. 3-58]. Теперь рассмотрим две взаимодействующие 3-мерные кривые в R^n. Эти кривые даются двумя следующими основными векторами $\vec{e}_k$ и $\vec{l}_k$ $(k = 1,2,3)$. Движение этих кривых определяется следующими уравнениями:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}_x = C\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}_t = D\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \tag{2.3.2}$$

и

$$\begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \end{pmatrix}_x = L \begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \end{pmatrix}_t = N \begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \end{pmatrix}. \tag{2.3.3}$$

Здесь $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ являются единичными касательным, нормальным и бинормальным векторами соответствующим первой кривой, $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ и $\vec{l}_3$ являются единичными касательным, нормальным и бинормальным векторами соответствующим второй кривой, x - длина дуги, характеризующая эти две кривые. Матрицы C, D, L, N даются как

$$C = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & \tau_1 \\ 0 & -\tau_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & k_2 & 0 \\ -k_2 & 0 & \tau_2 \\ 0 & -\tau_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для кривизны и кручения кривых получаем

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{\vec{e}_{1x}^{\,2}}, \quad \tau_1 = \frac{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_{1x} \wedge \vec{e}_{1xx})}{e_{1x}^2}, \\ k_2 &= \sqrt{\vec{l}_{1x}^{\,2}}, \quad \tau_2 = \frac{\vec{l}_1 \cdot (\vec{l}_{1x} \wedge \vec{l}_{1xx})}{\vec{l}_{1x}^{\,2}}. \end{aligned}$$

Из условия совместности $\vec{e}_{xt} = \vec{e}_{tx}$ и $\vec{l}_{xt} = \vec{l}_{tx}$ уравнения (2.3.2) и (2.3.3) соответственно, получаем условие нулевой кривизны

$$\begin{aligned} C_t - D_x + [C, D] &= 0, \\ L_t - N_x + [L, N] &= 0. \end{aligned}$$

В элементах эти уравнения принимают вид

$$
\begin{aligned}
k_{1t} &= \omega_{3x} + \tau_1 \omega_2, \\
\tau_{1t} &= \omega_{1x} - k_1 \omega_2, \\
\omega_{2x} &= \tau_1 \omega_3 - k_1 \omega_1
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
k_{2t} &= \theta_{3x} + \tau_2 \theta_2, \\
\tau_{2t} &= \theta_{1x} - k_2 \theta_2, \\
\theta_{2x} &= \tau_2 \theta_3 - k_2 \theta_1,
\end{aligned}
$$

Наш следующий шаг заключается в следующих обозначениях:

$$\vec{A} \equiv \vec{e}_1, \quad \vec{B} \equiv \vec{l}_1.$$

Также предположим, что

$$\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 + F_3 \vec{e}_3, \quad \vec{E} = E_1 \vec{l}_1 + E_2 \vec{l}_2 + E_3 \vec{l}_3,$$

где

$$\vec{F} = 2\nu_1 \vec{H} \wedge \vec{A}, \quad \vec{E} = 2\nu_2 \vec{H} \wedge \vec{B}.$$

Далее, получим

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \sqrt{\vec{A}_x^2}, \\
\tau_1 &= \frac{\vec{A} \cdot (\vec{A}_x \wedge \vec{A}_{xx})}{\vec{A}_x^2}, \\
k_2 &= \sqrt{\vec{B}_x^2}, \\
\tau_2 &= \frac{\vec{B} \cdot (\vec{B}_x \wedge \vec{B}_{xx})}{\vec{B}_x^2}
\end{aligned}
$$

и используя матричные формы векторов $\vec{A}$ в виде (2.3) и $\vec{B}, \vec{F}, \vec{E}$ в виде (2.1.2), получаем

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= -\frac{k_{1xx}+F_2\tau_1+F_{3x}}{k_1}+(\tau_1-u_1)\tau_1,\\
\omega_2 &= k_{1x}+F_3,\\
\omega_3 &= k_1(\tau_1-u_1)-F_2,\\
\theta_1 &= -\frac{k_{2xx}+E_2\tau_2+E_{3x}}{k_2}+(\tau_2-u_2)\tau_2,\\
\theta_2 &= k_{2x}+E_3,\\
\theta_3 &= k_2(\tau_2-u_2)-E_2
\end{aligned}
$$

с

$$
F_1 = E_1 = 0.
$$

Теперь можем написать уравнения для $k_j(j=1,2)$ и $\tau_j(j=1,2)$ в виде

$$
\begin{aligned}
k_{1t} &= 2k_{1x}\tau_1+k_1\tau_{1x}-(u_1k_1)_x-F_{2x}+F_3\tau_1,\\
\tau_{1t} &= \left[-\frac{k_{1xx}+F_2\tau_1+F_{3x}}{k_1}+(\tau_1-u_1)\tau_1-\frac{1}{2}k_1^2\right]_x-F_3k_1,\\
k_{2t} &= 2k_{2x}\tau_2+k_2\tau_{2x}-(u_2k_2)_x-E_{2x}+E_3\tau_2,\\
\tau_{2t} &= \left[-\frac{k_{2xx}+E_2\tau_2+E_{3x}}{k_2}+(\tau_2-u_2)\tau_2-\frac{1}{2}k_2^2\right]_x-E_3k_2.
\end{aligned}
$$

Учитывая во внимание (2.1.5) и (2.1.4), введем четыре новые вещественные функции $\alpha_i(i=1,2)$ и $\beta_j(j=1,2)$, как

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0.5k_1\sqrt{1+\zeta_1},\\
\beta_1 &= \tau_1(1+\xi_1),\\
\alpha_2 &= 0.5k_2\sqrt{1+\zeta_2},\\
\beta_2 &= \tau_2(1+\xi_2),
\end{aligned}
$$

где

$$\zeta_1 = \frac{2|WA_x^- - MA^-|^2}{W^2(1+A_3)^2\vec{A}_x^2} - 1,$$

$$\zeta_2 = \frac{2|W[(1+A_3)(1+B_3)^{-1}B^-]_x - M[(1+A_3)(1+B_3)^{-1}B^-]|^2}{W^2(1+A_3)^2\vec{B}_x^2} - 1,$$

$$\xi_1 = \frac{\bar{R}_x R - \bar{R}R_x - 4i|R|^2\nu_x}{2i\alpha_1^2 W^2(1+A_3)^2\tau_1} - 1,$$

$$\xi_2 = \frac{\bar{Z}_x Z - \bar{Z}Z_x - 4i|Z|^2\nu_x}{2i\alpha_2^2 W^2(1+A_3)^2\tau_2} - 1.$$

Здесь

$$\nu = \partial_x^{-1}\left[\frac{A_1A_{2x} - A_{1x}A_2}{(1+A_3)W} - \frac{(1+A_3)(B_{1x}B_2 - B_1B_{2x})}{(1+B_3)^2 W}\right].$$

Теперь мы можем написать уравнения для функций $\alpha_i (i = 1,2)$ и $\beta_j (j = 1,2)$. Они удовлетворяют четырем следующим уравнениям:

$$\alpha_{1t} - 2\alpha_{1x}\beta_1 - \alpha_1\beta_{1x} = 0,$$

$$\beta_{1t} + \left[\frac{\alpha_{1xx}}{\alpha_1} - \beta_1^2 + 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\right]_x = 0,$$

$$\alpha_{2t} - 2\alpha_{2x}\beta_2 - \alpha_2\beta_{2x} = 0,$$

$$\beta_{2t} + \left[\frac{\alpha_{2xx}}{\alpha_2} - \beta_2^2 + 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\right]_x = 0.$$

Далее введем две новые сложные функции, используя А-преобразование. А-преобразование выглядит следующим образом [33, p. 1750115].

$$q_1 = \alpha_1 e^{-i\partial_x^{-1}\beta_1},$$
$$q_2 = \alpha_2 e^{-i\partial_x^{-1}\beta_2}. \qquad (2.3.4)$$

Иногда мы используем следующий явный вид А-преобразования:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= 0.5k_1\sqrt{1+\zeta_1}e^{-i\partial_x^{-1}[\tau_1(1+\xi_1)]}, \\
q_2 &= 0.5k_2\sqrt{1+\zeta_2}e^{-i\partial_x^{-1}[\tau_2(1+\xi_2)]}.
\end{aligned}
\tag{2.3.5}
$$

Не трудно проверить, что эти новые комплексные функции $q_j(j=1,2)$ удовлетворяют системе уравнений (2.2.1).

Это не что иное, как система Манакова. Таким образом, мы доказали, что система Манакова (2.2.1) является геометрически эквивалентным аналогом двухслойного спиново уравнения (2.1.3) или в векторной форме (2.3.1). *Теорема 2.1 доказана.*

Отметим, что если $\zeta_i = \xi_j = 0$, то А-преобразования (2.3.4) или (2.3.5) сводятся к известному преобразованию Хасимоты [92]:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= 0.5\kappa_1 e^{-i\partial_x^{-1}\tau_1}, \\
q_2 &= 0.5\kappa_2 e^{-i\partial_x^{-1}\tau_2}.
\end{aligned}
$$

Из теоремы 2.1 вытекает следствие, выражающее связь между решениями двухслойного спиново уравнения и системой Манакова.

Следствие 1. Пусть A_j и $B_j(j=1,2,3)$ являются решениями связанного спиново уравнения (2.1.3). Тогда решение системы Манакова (2.2.1) представляется через решения уравнения (2.1.3) в виде

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{Re^{2i\nu}}{W(1+A_3)}, \\
q_2 &= \frac{Ze^{2i\nu}}{W(1+A_3)}.
\end{aligned}
$$

Здесь *R*, *W* и Z заданы в (2.1.5).

2.4 Калибровочное преобразование между связанным спиновым уравнением и системой Манакова

Пусть $Y=(\psi_1,\psi_2)^T$ и $Z=(\psi_3,\psi_4)^T$ являются решениями системы (2.1.3). Теперь введем новые функции $\phi_j\ (j=1,2,3)$ как

$$
\phi_1 = g_1\psi_1+\bar{g}_2\psi_2, \quad \phi_2 = g_2\psi_1-\bar{g}_1\psi_2, \quad \phi_3 = g_1\psi_1+\bar{g}_2\psi_3.
$$

Прямые расчеты показывают, что эти новые функции ϕ_j $(j=1,2,3)$ удовлетворяют системе уравнений (2.1.4). То есть они дают представление Лакса системы Манакова. Этот результат доказывает калибровочную эквивалентность между связанным спиновым уравнением (2.3.1) и системой Манакова (2.2.1).

2.5 Калибровочная эквивалентность между Γ -спин системой и системой Манакова

Выше мы доказали, что связанное спиновое уравнение (2.1.3) и система Манакова (2.2.1) являются геометрически эквивалентным друг другу. В этом разделе мы хотим представить другой калибровочно эквивалентный аналог системы Манакова. Хорошо известно, что представление Лакса уравнения Манакова (2.2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_x &= U\Phi, \\ \Phi_t &= V\Phi. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Здесь

$$U=-i\lambda\Sigma+U_0, \quad V=-2i\lambda^2\Sigma+2\lambda U_0+V_0$$

с

$$\Sigma=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}, U_0=\begin{pmatrix}0&q_1&q_2\\-\bar{q}_1&0&0\\-\bar{q}_2&0&0\end{pmatrix}, V_0=i\begin{pmatrix}|q_1|^2+|q_2|^2&q_{1x}&q_{2x}\\\bar{q}_{1x}&-|q_1|^2&-\bar{q}_1q_2\\\bar{q}_{2x}&-\bar{q}_2q_1&-|q_2|^2\end{pmatrix}.$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\Phi(x,t;\lambda)$ *является решением системы* (2.2.2), *соответствующей уравнению Манакова (2.2.1). Если* $\Psi=g^{-1}\Phi$, $g=\Phi|_{\lambda=0}$ *удовлетворяет системе*

$$\begin{aligned} \Psi_x &= U_\Gamma\Psi, \\ \Psi_t &= V_\Gamma\Psi, \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

где

$$U_\Gamma=-i\lambda\Gamma, \quad V_\Gamma=-2i\lambda^2\Gamma+\frac{1}{2}\lambda[\Gamma,\Gamma_x], \tag{2.5.2}$$

тогда из условии совместности системы (2.5.1) можно вывести уравнение вида

$$i\Gamma_t + \frac{1}{2}[\Gamma, \Gamma_{xx}] = 0, \qquad (2.5.3)$$

тогда уравнение (2.5.3) и система Манакова (2.2.1) являются калибровочно-эквивалентными друг другу.

Для дальнейшего удобства, уравнение (2.5.3) будем называть Γ -спин системой.

Доказательство. Рассмотрим калибровочное преобразование

$$\Psi = g^{-1}\Phi, \quad g = \Phi\big|_{\lambda=0}.$$

Из условия теоремы следует, что Ψ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \Psi_x &= U'\Psi, \\ \Psi_t &= V'\Psi, \end{aligned}$$

где

$$U' = -i\lambda\Gamma, \quad V' = -2i\lambda^2\Gamma + \frac{1}{2}\lambda[\Gamma, \Gamma_x],$$

Здесь

$$\Gamma = g^{-1}\Sigma g, \quad \Gamma^2 = I \qquad (2.5.4)$$

и

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы Γ удовлетворяют некоторым ограничениям

$$\Gamma_{33} = -(1 + \Gamma_{11} + \Gamma_{22}), \quad \Gamma_{ij} = \overline{\Gamma}_{ji},$$

и

$$\begin{aligned}\Gamma_{ik}\Gamma_{kj}+\Gamma_{i(k+1)}\Gamma_{(k+1)i}+\Gamma_{i(k+2)}\Gamma_{(k+2)i} &= 0,(i\neq k\neq j),\\ \Gamma_{ik}\Gamma_{ki}+\Gamma_{i(k+1)}\Gamma_{(k+1)i}+\Gamma_{i(k+2)}\Gamma_{(k+2)i} &= 1.\end{aligned}$$

Применив калибровочное преобразование к системе (2.5.1), получаем условие нулевой кривизны для Г-спин системы в следующем виде

$$U_{\Gamma t}-V_{\Gamma x}+[U_{\Gamma},V_{\Gamma}]=0. \tag{2.5.5}$$

Подставляя пару Лакса (2.5.2) в уравнение (2.5.5), имеем

$$-i\lambda\Gamma_t+2i\lambda^2\Gamma_x-\frac{1}{2}\lambda[\Gamma,\Gamma_x]_x-\frac{1}{2}i\lambda^2\Gamma[\Gamma,\Gamma_x]+\frac{1}{2}i\lambda^2[\Gamma,\Gamma_x]\Gamma=0. \tag{2.5.6}$$

Разделим (2.5.6) на $-\lambda$:

$$i\Gamma_t+\frac{1}{2}[\Gamma,\Gamma_{xx}]-2i\lambda\Gamma_x+\frac{1}{2}i\lambda\Gamma[\Gamma,\Gamma_x]-\frac{1}{2}i\lambda[\Gamma,\Gamma_x]\Gamma=0. \tag{2.5.7}$$

Далее, применим формулу (2.5.4) к уравнению (2.5.7), получаем искомую Г-спин систему

$$i\Gamma_t+\frac{1}{2}[\Gamma,\Gamma_{xx}]=0.$$

Следовательно, система Манакова и Г-спин система калибровочно-эквивалентны. *Что и требовалось доказать.*

Аналогичные результаты были получены, например, в работе Н.А. Костов, Р. Дандолофф, В.С. Герджикова [90, p. 168-178].

2.6 Связь между решениями связанного спиново уравнения и Γ-спин системы

В предыдущих пунктах мы показали, что к одной и той же системе уравнений - системе Манакова (2.2.1), соответствуют две спиновые системы: связанное спиновое уравнение (2.3.1) и Γ-спин система (2.5.2). Это говорит о том, что между этими двумя спиновыми системами должно быть некоторое точное соотношение/соответствие. Другими словами, 2-слойное спиновое уравнение (2.1.3) и Γ -спин система (2.5.2) эквивалентны друг другу некоторыми точными преобразованиями. Ниже мы представим эти преобразования.

Прямое преобразование

В терминах спиновых векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$, элементы Γ -спин системы выражаются в виде

$$\Gamma = \frac{1}{2+K}\begin{pmatrix} 2A_3 - K & 2A^- & \frac{2(1+A_3)B^-}{1+B_3} \\ 2A^+ & -(2A_3+K) & \frac{2A^+B^-}{1+B_3} \\ \frac{2(1+A_3)B^+}{1+B_3} & \frac{2A^-B^+}{1+B_3} & K-2 \end{pmatrix}, \qquad (2.6.1)$$

где

$$K = \frac{(1+A_3)(1-B_3)}{1+B_3}.$$

Преобразование (2.6.1) будем называть прямым преобразованием. Оно позволяет нам находить решения Γ - спин системы (2.5.2), если известны решения связанного спинового уравнения (2.1.3).

Обратное преобразование

Решения связанного спинового уравнения (2.1.3) могут быть выражены через компоненты Γ - спин системы (2.5.2) виде

$$A = \frac{1}{1-\Gamma_{33}}\begin{pmatrix} \Gamma_{11}-\Gamma_{22} & 2\Gamma_{12} \\ 2\Gamma_{21} & \Gamma_{22}-\Gamma_{11} \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{1}{1-\Gamma_{22}}\begin{pmatrix} \Gamma_{11}-\Gamma_{33} & 2\Gamma_{13} \\ 2\Gamma_{31} & \Gamma_{33}-\Gamma_{11} \end{pmatrix}. \qquad (2.6.2)$$

Преобразования (2.6.2) назовем обратным преобразованием. Используя обратное преобразование, мы можем найти решения связанного спинового уравнения (2.1.3), если известны решения Γ -спин системы (2.5.2).

Выводы по разделу

В этой главе мы показали, как динамика двух взаимодействующих движущихся кривых в некотором пространстве R^n может быть связана с динамикой связанных спиновых систем (2.3.1), а именно, в сочетании спинового уравнения (2.5.2). Далее, после некоторых вычислений мы доказали, что эти две взаимодействующие движущиеся кривые связаны с системой Манакова (2.2.1). С другой стороны, хорошо известно, что система Манакова эквивалентна Γ -спин системе. Кроме того, мы представили преобразования, которые установили (показывают) связь между решениями Γ -спин системы и связанного спинового уравнения. Результаты исследования опубликованы в работе [33, p.1750115].

3 МНОГОСЛОЙНАЯ СПИНОВАЯ СИСТЕМА И ВЕКТОРНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

В данном разделе мы изучаем интегрируемые многослойные спиновые системы (СС). Исследуем их связь с геометрическими потоками взаимодействующих кривых и поверхностей в некотором пространстве R^n. Затем мы приводим их геометрически эквивалентные аналоги. Покажем, что эквивалентными аналогами многослойной СС является многокомпонентное векторное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Интересно отметить, что интегрируемое многослойное спиновое уравнение содержит постоянное магнитное поле H. Представляется, что этот постоянный магнитный вектор играет важную роль в теории интегрируемых многослойных СС и в нелинейной динамике магнитных систем. Наконец, мы приводим некоторые классы интегрируемых моделей взаимодействующих вихрей.

Существует интересная геометрическая связь между геометрическими потоками кривых и поверхностей, и интегрируемыми нелинейными дифференциальными уравнениями [93-96]. В этом разделе впервые нами разработана подход изучения интегрируемых потоков кривых и поверхностей, связанных с векторными (многокомпонентными) НУШ и многослойными СС. Под «потоками кривых» обычно подразумевают следующие уравнения:

$$\vec{e}_{ix} = C \wedge \vec{e}_i, \quad \vec{e}_{it} = D \wedge \vec{e}_i, \quad i = 1,2,3,$$

где

$$C = \tau\vec{e}_1 + \kappa\vec{e}_3, \quad D = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + \omega_3\vec{e}_3.$$

Точно так же мы можем записать геометрические потоки погруженных поверхностей в некотором евклидовом пространстве. Они задаются следующими уравнениями Гаусса-Вайнгардена:

$$\chi_x = N\chi, \quad \chi_t = M\chi.$$

Условия интегрируемости этих уравнений задаются следующим уравнением Гаусса-Мейнарди-Кодацци

$$N_t - M_x + [N, M] = 0.$$

Цель настоящего исследования – дать геометрическую формулировку многослойных СС.

3.1 Многокомпонентное НУШ и многослойная СС

Приведем некоторые общие сведения о векторном НУШ и многослойной СС.

Векторное НУШ запишется в виде

$$
\begin{aligned}
iq_{1t} + q_{1xx} - vq_1 &= 0,\\
iq_{2t} + q_{2xx} - vq_2 &= 0,\\
&\vdots\\
iq_{Nt} + q_{Nxx} - vq_N &= 0,
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

где

$$v + 2\left(\sum_{j=1}^{N} |q_j|^2\right) = 0.$$

Спиновое уравнение для N-слоев можно записать как

$$
\begin{aligned}
&\vec{A}_t^{(1)} + \vec{A}^{(1)} \wedge \vec{A}_{xx}^{(1)} + u_1\vec{A}_x^{(1)} + 2v_1\vec{H} \wedge \vec{A}^{(1)} = 0,\\
&\vec{A}_t^{(2)} + \vec{A}^{(2)} \wedge \vec{A}_{xx}^{(2)} + u_2\vec{A}_x^{(2)} + 2v_2\vec{H} \wedge \vec{A}^{(2)} = 0,\\
&\vdots\\
&\vec{A}_t^{(N)} + \vec{A}^{(N)} \wedge \vec{A}_{xx}^{(N)} + u_N\vec{A}_x^{(N)} + 2v_N\vec{H} \wedge \vec{A}^{(N)} = 0.
\end{aligned}
$$

Перепишем это уравнение в матричной форме в виде

$$
\begin{aligned}
&iA_t^{(1)} + \frac{1}{2}[A^{(1)}, A_{xx}^{(1)}] + iu_1A_x^{(1)} + v_1[\sigma_3, A^{(1)}] = 0,\\
&iA_t^{(2)} + \frac{1}{2}[A^{(2)}, A_{xx}^{(2)}] + iu_2A_x^{(2)} + v_2[\sigma_3, A^{(2)}] = 0,\\
&\vdots\\
&iA_t^{(N)} + \frac{1}{2}[A^{(N)}, A_{xx}^{(N)}] + iu_NA_x^{(N)} + v_N[\sigma_3, A^{(N)}] = 0,
\end{aligned}
\tag{3.1.2}
$$

где $A^{(j)} = (A_1^{(j)}, A_2^{(j)}, A_3^{(j)})$ и $A^{(j)2} = 1$ $(j = 1,2,\ldots,N)$ с

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} A_3^{(j)} & A^{(j)-} \\ A^{(j)+} & -A_3^{(j)} \end{pmatrix}, \quad A^{(j)2} = I, \quad A^{(j)\pm} = A_1^{(j)} \pm iA_2^{(j)},$$

и u_j, $v_j(j=1,2,...,N)$ — некоторые потенциалы связи.

Теорема 3.1. *Многокомпонентное НУШ (3.1.1) и многослойная СС (3.1.2) являются геометрически эквивалентными*.

Доказательство. Доказательство *теоремы 3.1* осуществляется принципом «от простого к сложному», т.е., сначала рассматриваем геометрическую эквивалентность между однокомпонентным НУШ и однослойным спиновым уравнением.

Далее, представим некоторую информацию о спиновом уравнении для однослойного случая. Рассмотрим спиновой вектор $\vec{A}=(A_1,A_2,A_3)$, где $\vec{A}^2=1$. Пусть этот спиновой вектор подчиняется однослойному спиновому уравнению, которое читается как

$$\vec{A}_t+\vec{A}\wedge\vec{A}_{xx}+u_1\vec{A}_x+\vec{F}=0, \tag{3.1.3}$$

где $u_1(x,t,A_j,A_{jx})$ - вещественная функция (потенциал); $\vec{F}$ - некоторая вектор-функция. Матричная формаспинового уравнения имеет вид

$$iA_t+\frac{1}{2}[A,A_{xx}]+iu_1A_x+F \quad = \quad 0,$$

где

$$A=\begin{pmatrix} A_3 & A^- \\ A^+ & -A_3 \end{pmatrix},\quad A^2=I=diag(1,1),\quad A^{\pm}=A_1\pm iA_2,$$

$$F=\begin{pmatrix} F_3 & F^- \\ F^+ & -F_3 \end{pmatrix},\quad F^2=I=diag(1,1),\quad F^{\pm}=F_1\pm iF_2.$$

Иногда удобно работать с векторной формой следующего вида:

$$\vec{A}_t+\vec{A}\wedge\vec{A}_{xx}+u_1\vec{A}_x+v_1\vec{H}\wedge\vec{A}=0, \tag{3.1.4}$$

где $v_1(x,t,A_j,A_{jx})$ - действительная функция (потенциал), $\vec{H}=(0,0,1)$ - постоянное магнитное поле.

Матричная форма уравнения (3.1.4) имеет вид

$$iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + iu_1 A_x + v_1[\sigma_3, A] \quad = \quad 0.$$

Далее будем искать геометрический эквивалент однослойного спинового уравнения (3.1.1). Рассмотрим трехмерную кривую в R^3. Эта кривая задается следующими векторами $\vec{e}_k, k = 1, 2, 3,$ которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}_x = C \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}_t = D \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}. \tag{3.1.5}$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ – единичный касательный, нормальный и бинормальный векторы к кривой, x – длина дуги параметризации кривой. А матрицы C и D имеют следующий вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & \tau_1 \\ 0 & -\tau_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кривизна и кручение кривой определяются следующими формулами:

$$k_1 = \sqrt{\vec{e}_{1x}^{\,2}}, \quad \tau_1 = \frac{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_{1x} \wedge \vec{e}_{1xx})}{\vec{e}_{1x}^{\,2}}.$$

Условие совместности уравнений (3.1.5) имеет вид

$$C_t - D_x + [C, D] \quad = \quad 0,$$

или в элементах матриц C и D:

$$\begin{aligned} k_{1t} &= \omega_{3x} + \tau_1 \omega_2, \\ \tau_{1t} &= \omega_{1x} - k_1 \omega_2, \\ \omega_{2x} &= \tau_1 \omega_3 - k_1 \omega_1. \end{aligned}$$

Теперь делаем следующие идентификации:

$$\vec{A} \equiv \vec{e}_1, \quad \vec{F} = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3.$$

Тогда имеем, что

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \vec{A}_x^2, \\ \tau_1 &= \frac{\vec{A}\cdot(\vec{A}_x \wedge \vec{A}_{xx})}{\vec{A}_x^2}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{k_{1xx}+F_2\tau_1+F_{3x}}{k_1}+(\tau_1-u_1)\tau_1, \\ \omega_2 &= k_{1x}+F_3, \\ \omega_3 &= k_1(\tau_1-u_1)-F_2 \end{aligned}$$

с $F_1 = E_1 = 0$. Уравнения для k_1 и τ_1 будут иметь вид

$$\begin{aligned} k_{1t} &= 2k_{1x}\tau_1 + k_1\tau_{1x} - (u_1k_1)_x - F_{2x} + F_3\tau_1, \\ \tau_{1t} &= \left[-\frac{k_{1xx}+F_2\tau_1+F_{3x}}{k_1}+(\tau_1-u_1)\tau_1-\frac{1}{2}k_1^2\right]_x - F_3k_1. \end{aligned}$$

Далее, используя преобразование Хасимоты [92, p.477-484], представляющее связь кривизны и кручения кривой одной комплексной функцией

$$q_1 = \frac{\kappa_1}{2}e^{-i\partial_x^{-1}\tau_1}.$$

Эта функция при $u_1 = v_1 = 0$ удовлетворяет однокомпонентному НУШ

$$iq_{1t} + q_{1xx} + 2|q_1|^2 q_1 = 0. \tag{3.1.6}$$

Таким образом, доказано, что однослойное спиновое уравнение (3.1.3) и однокомпонентное НУШ (3.1.6) эквивалентны друг другу в геометрическом смысле. Показано в работе Лакшманана [38, p.354-355].

Теперь рассмотрим два спинового вектора $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ и $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$, где $\vec{A}^2 = \vec{B}^2 = 1$. Пусть эти векторы удовлетворяют следующему двухслойному спиновому уравнению:

$$
\begin{aligned}
\vec{A}_t + \vec{A} \wedge \vec{A}_{xx} + u_1 \vec{A}_x + 2v_1 \vec{H} \wedge \vec{A} &= 0, \\
\vec{B}_t + \vec{B} \wedge \vec{B}_{xx} + u_2 \vec{B}_x + 2v_2 \vec{H} \wedge \vec{B} &= 0,
\end{aligned} \qquad (3.1.7)
$$

или в матричной форме

$$
\begin{aligned}
iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + iu_1 A_x + v_1 [\sigma_3, A] &= 0, \\
iB_t + \frac{1}{2}[B, B_{xx}] + iu_2 B_x + v_2 [\sigma_3, B] &= 0,
\end{aligned} \qquad (3.1.8)
$$

где $\vec{H} = (0,0,1)^T$ – постоянное магнитное поле, u_j и $v_j (j = 1,2)$ - потенциалы связи. Здесь

$$
\begin{aligned}
u_1 &= i[(\bar{q}_2 g_1 \bar{g}_3 - q_2 \bar{g}_1 g_3) + (\bar{q}_3 g_1 \bar{g}_4 - q_3 \bar{g}_1 g_4)], \\
v_1 &= -[|q_2|^2 (\Delta_1 + |g_3|^2) + |q_3|^2 (\Delta_1 + |g_4|^2) + q_2 \bar{q}_3 g_3 \bar{g}_4 + \bar{q}_2 q_3 \bar{g}_3 g_4], \\
u_2 &= i[(\bar{q}_2 g_1 \bar{g}_3 - q_2 \bar{g}_1 g_3) + (\bar{q}_3 g_1 \bar{g}_4 - q_3 \bar{g}_1 g_4)], \\
v_2 &= -[|q_2|^2 (\Delta_1 + |g_3|^2) + |q_3|^2 (\Delta_1 + |g_4|^2) + q_2 \bar{q}_3 g_3 \bar{g}_4 + \bar{q}_2 q_3 \bar{g}_3 g_4],
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= |g_1|^2 + |g_2|^2, \\
\Delta_2 &= |g_1|^2 + |g_3|^2, \\
\Delta &= |g_1|^2 + |g_2|^2 + |g_3|^2 .
\end{aligned}
$$

Можно переписать связанноеспиновое уравнение (3.1.8) на языке спиновой матрицы A в виде

$$
\begin{aligned}
iA_t^+ + (A^+ A_{3xx} - A_{xx}^+ A_3) + iu_1 A_x^+ - 2v_1 A^+ &= 0,\\
iA_t^- - (A^- A_{3xx} - A_{xx}^- A_3) + iu_1 A_x^- + 2v_1 A^- &= 0,\\
iA_{3t} + \frac{1}{2}(A^- A_{xx}^+ - A_{xx}^- A^+) + iu_1 A_{3x} &= 0,\\
iB_t^+ + (B^+ B_{3xx} - B_{xx}^+ B_3) + iu_2 B_x^+ + 2v_2 B^+ &= 0,\\
iB_t^- - (B^- B_{3xx} - B_{xx}^- B_3) + iu_2 B_x^- + 2v_2 B^- &= 0,\\
iB_{3t} + \frac{1}{2}(B^- B_{xx}^+ - B_{xx}^- B^+) + iu_2 B_{3x} &= 0,
\end{aligned}
$$

или в терминах компонентов спинового вектора $\vec{A}$ в виде

$$
\begin{aligned}
A_{1t} + A_2 A_{3xx} - A_{2xx} A_3 + u_1 A_{1x} - 2v_1 A_2 &= 0,\\
A_{2t} + A_3 A_{1xx} - A_{3xx} A_1 + u_1 A_{2x} - 2v_1 A_1 &= 0,\\
A_{3t} + A_1 A_{2xx} - A_{1xx} A_2 + u_1 A_{3x} &= 0,\\
B_{1t} + B_2 B_{3xx} - B_{2xx} B_3 + u_2 B_{1x} - 2v_2 B_2 &= 0,\\
B_{2t} + B_3 B_{1xx} - B_{3xx} B_1 + u_2 B_{2x} - 2v_2 B_1 &= 0,\\
B_{3t} + B_1 B_{2xx} - B_{1xx} B_2 + u_2 B_{3x} &= 0.
\end{aligned}
$$

Геометрическая эквивалентность системы Манакова

$$
\begin{aligned}
iq_{1t} + q_{1xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_1 &= 0,\\
iq_{2t} + q_{2xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2)q_2 &= 0
\end{aligned}
\qquad (3.1.9)
$$

и двухслойной СС (3.1.8) была доказана во втором разделе. Отметим, что система Манакова (3.1.9) является частным случаем векторного НУШ (3.1.1) при $N = 2$.

Далее, рассмотрим три спиновых векторов $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ и $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$, где $\vec{A}^2 = \vec{B}^2 = \vec{C}^2 = 1$. Пусть эти спиновые векторы удовлетворяют трехслойному спиновому уравнению вида

$$
\begin{aligned}
\vec{A}_t + \vec{A} \wedge \vec{A}_{xx} + u_1 \vec{A}_x + 2v_1 \vec{H} \wedge \vec{A} &= 0,\\
\vec{B}_t + \vec{B} \wedge \vec{B}_{xx} + u_2 \vec{B}_x + 2v_2 \vec{H} \wedge \vec{B} &= 0,\\
\vec{C}_t + \vec{C} \wedge \vec{C}_{xx} + u_3 \vec{C}_x + 2v_3 \vec{H} \wedge \vec{C} &= 0,
\end{aligned}
$$

или в матричной форме

$$
\begin{aligned}
iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + iu_1 A_x + v_1[\sigma_3, A] &= 0,\\
iB_t + \frac{1}{2}[B, B_{xx}] + iu_2 B_x + v_2[\sigma_3, B] &= 0,\\
iC_t + \frac{1}{2}[C, C_{xx}] + iu_3 C_x + v_3[\sigma_3, C] &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.1.10}
$$

Здесь u_j и $v_j (j = 1,2,3)$ являются потенциалами связи и имеют вид

$$
\begin{aligned}
u_1 &= i[(\bar{q}_2 g_1 \bar{g}_3 - q_2 \bar{g}_1 g_3) + (\bar{q}_3 g_1 \bar{g}_4 - q_3 \bar{g}_1 g_4)],\\
v_1 &= -[|q_2|^2 (\Delta_1 + |g_3|^2) + |q_3|^2 (\Delta_1 + |g_4|^2) + q_2 \bar{q}_3 g_3 \bar{g}_4 + \bar{q}_2 q_3 \bar{g}_3 g_4],\\
u_2 &= i[(\bar{q}_1 \bar{g}_2 + \bar{q}_3 \bar{g}_4) g_1 - (q_1 g_2 + q_3 g_4) \bar{q}_1],\\
v_2 &= -\frac{2}{\Delta_2}[|q_1|^2 (\Delta_2 + |g_2|^2) + |q_3|^2 (\Delta_2 + |g_4|^2) + q_1 \bar{q}_3 g_2 \bar{g}_4 + \bar{q}_1 q_3 \bar{g}_2 g_4],\\
u_3 &= \frac{2i}{\Delta_3}[(\bar{q}_1 \bar{g}_2 + \bar{q}_2 \bar{g}_3) g_1 - (q_1 g_2 + q_2 g_3) \bar{g}_1],\\
v_3 &= -\frac{2}{\Delta_3}[|q_1|^2 (\Delta_3 + |g_2|^2) + |q_2|^2 (\Delta_3 + |g_3|^2) + q_1 \bar{q}_2 g_2 \bar{g}_3 + \bar{q}_1 q_2 \bar{g}_2 g_3],
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= |g_1|^2 + |g_2|^2,\\
\Delta_2 &= |g_1|^2 + |g_3|^2,\\
\Delta_3 &= |g_1|^2 + |g_4|^2,\\
\Delta &= |g_1|^2 + |g_2|^2 + |g_3|^2 + |g_4|^2 .
\end{aligned}
$$

Для получения трехкомпонентного НУШ, геометрически эквивалентного трехслойному спиновому уравнению (3.1.10), рассмотрим три взаимодействующие трехмерные кривые в некотором евклидовом пространстве, которые задаются тремя векторами e_k, l_k и n_k, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}_x = C \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}_t = D \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \tag{3.1.5}$$

и

$$\begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \end{pmatrix}_x = L \begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \end{pmatrix}_t = N \begin{pmatrix} \vec{l}_1 \\ \vec{l}_2 \\ \vec{l}_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{pmatrix}_x = M \begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{pmatrix}_t = J \begin{pmatrix} \vec{n}_1 \\ \vec{n}_2 \\ \vec{n}_3 \end{pmatrix}. \tag{3.1.11}$$

Матрицы C, D, L, N, M, J имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & \tau_1 \\ 0 & -\tau_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & k_2 & 0 \\ -k_2 & 0 & \tau_2 \\ 0 & -\tau_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & k_3 & 0 \\ -k_3 & 0 & \tau_3 \\ 0 & -\tau_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & \delta_3 & -\delta_2 \\ -\delta_3 & 0 & \delta_1 \\ \delta_2 & -\delta_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для кривизны и кручения кривых получаем

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \sqrt{\vec{e}_{1x}^{\,2}}, \quad \tau_1 = \frac{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_{1x} \wedge \vec{e}_{1xx})}{e_{1x}^2},\\
k_2 &= \sqrt{\vec{l}_{1x}^{\,2}}, \quad \tau_2 = \frac{\vec{l}_1 \cdot (\vec{l}_{1x} \wedge \vec{l}_{1xx})}{l_{1x}^2},\\
k_3 &= \sqrt{\vec{n}_{1x}^{\,2}}, \quad \tau_3 = \frac{\vec{n}_1 \cdot (\vec{n}_{1x} \wedge \vec{n}_{1xx})}{\vec{n}_{1x}^{\,2}}.
\end{aligned}
$$

Из условии совместности уравнения (3.1.5) и (3.1.11) попарно, получаем условии нулевой кривизны:

$$
\begin{aligned}
C_t - D_x + [C, D] &= 0,\\
L_t - N_x + [L, N] &= 0,\\
M_t - J_x + [M, J] &= 0.
\end{aligned}
$$

В элементах, эти уравнения принимают вид

$$
\begin{aligned}
k_{1t} &= \omega_{3x} + \tau_1 \omega_2,\\
\tau_{1t} &= \omega_{1x} - k_1 \omega_2,\\
\omega_{2x} &= \tau_1 \omega_3 - k_1 \omega_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_{2t} &= \theta_{3x} + \tau_2 \theta_2,\\
\tau_{2t} &= \theta_{1x} - k_2 \theta_2,\\
\theta_{2x} &= \tau_2 \theta_3 - k_2 \theta_1,
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
k_{3t} &= \delta_{3x} + \tau_2 \delta_2,\\
\tau_{3t} &= \delta_{1x} - k_3 \delta_2,\\
\delta_{2x} &= \tau_3 \delta_3 - k_3 \delta_1.
\end{aligned}
$$

Как и в предыдущем разделе, мы предполагаем следующие отождествления:

$$
\vec{A} \equiv \vec{e}_1, \quad \vec{B} \equiv \vec{l}_1, \quad \vec{C} \equiv \vec{n}_1.
$$

Мы также предполагаем, что

$$\vec{F} = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3,$$
$$\vec{E} = E_1\vec{l}_1 + E_2\vec{l}_2 + E_3\vec{l}_3,$$
$$\vec{P} = P_1\vec{n}_1 + P_2\vec{n}_2 + P_3\vec{n}_3,$$

где

$$\vec{F} = 2v_1\vec{H} \wedge \vec{A},$$
$$\vec{E} = 2v_2\vec{H} \wedge \vec{B},$$
$$\vec{P} = 2v_3\vec{H} \wedge \vec{C}.$$

Тогда получаем:

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \vec{A}_x^2, \\ \tau_1 &= \frac{\vec{A}\cdot(\vec{A}_x \wedge \vec{A}_{xx})}{\vec{A}_x^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2^2 &= \vec{B}_x^2, \\ \tau_2 &= \frac{\vec{B}\cdot(\vec{B}_x \wedge \vec{B}_{xx})}{\vec{B}_x^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3^2 &= \vec{C}_x^2, \\ \tau_3 &= \frac{\vec{C}\cdot(\vec{C}_x \wedge \vec{C}_{xx})}{\vec{C}_x^2}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \omega_1 &= -\frac{k_{1xx} + F_2\tau_1 + F_{3x}}{k_1} + (\tau_1 - u_1)\tau_1, \\ \omega_2 &= k_{1x} + F_3, \\ \omega_3 &= k_1(\tau_1 - u_1) - F_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\frac{k_{2xx} + E_2\tau_2 + E_{3x}}{k_2} + (\tau_2 - u_2)\tau_2, \\ \theta_2 &= k_{2x} + E_3, \\ \theta_3 &= k_2(\tau_2 - u_2) - E_2, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= -\frac{k_{3xx}+P_2\tau_3+P_{3x}}{k_3}+(\tau_3-u_3)\tau_3,\\
\delta_2 &= k_{3x}+P_3,\\
\delta_3 &= k_3(\tau_3-u_3)-P_2,
\end{aligned}
$$

при

$$F_1=E_1=P_1=0.$$

В результате получаем следующие уравнения для k_j и τ_j $(j=1,2,3)$:

$$
\begin{aligned}
k_{1t} &= 2k_{1x}\tau_1+k_1\tau_{1x}-(u_1k_1)_x-F_{2x}+F_3\tau_1,\\
\tau_{1t} &= \left[-\frac{k_{1xx}+F_2\tau_1+F_{3x}}{k_1}+(\tau_1-u_1)\tau_1-\frac{1}{2}k_1^2\right]_x-F_3k_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_{2t} &= 2k_{2x}\tau_2+k_2\tau_{2x}-(u_2k_2)_x-E_{2x}+E_3\tau_2,\\
\tau_{2t} &= \left[-\frac{k_{2xx}+E_2\tau_2+E_{3x}}{k_2}+(\tau_2-u_2)\tau_2-\frac{1}{2}k_2^2\right]_x-E_3k_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_{3t} &= 2k_{3x}\tau_3+k_3\tau_{3x}-(u_3k_3)_x-P_{2x}+P_3\tau_3,\\
\tau_{3t} &= \left[-\frac{k_{3xx}+P_2\tau_3+P_{3x}}{k_3}+(\tau_3-u_3)\tau_3-\frac{1}{2}k_3^2\right]_x-P_3k_3.
\end{aligned}
$$

Согласно нашему подходу [33, p.1750115], теперь мы вводим следующие новые функции $\alpha_i(i=1,2,3)$ и $\beta_j(j=1,2,3)$:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0.5k_1\sqrt{1+\zeta_1},\\
\beta_1 &= \tau_1(1+\xi_1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_2 &= 0.5k_2\sqrt{1+\zeta_2},\\
\beta_2 &= \tau_2(1+\xi_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_3 &= 0.5k_3\sqrt{1+\zeta_3},\\
\beta_3 &= \tau_3(1+\xi_3),
\end{aligned}
$$

где $\zeta_i (i=1,2,3)$ и $\xi_j (j=1,2,3)$ - некоторые вещественные функции.

Теперь можем показать, что уравнения для функций $\alpha_i (i=1,2,3)$ и $\beta_j (j=1,2,3)$ читаются как

$$\begin{aligned}
\alpha_{1t} - 2\alpha_{1x}\beta_1 - \alpha_1\beta_{1x} &= 0,\\
\beta_{1t} + \left[\frac{\alpha_{1xx}}{\alpha_1} - \beta_1^2 + 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\right]_x &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{2t} - 2\alpha_{2x}\beta_2 - \alpha_2\beta_{2x} &= 0,\\
\beta_{2t} + \left[\frac{\alpha_{2xx}}{\alpha_2} - \beta_2^2 + 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\right]_x &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{3t} - 2\alpha_{3x}\beta_3 - \alpha_3\beta_{3x} &= 0,\\
\beta_{3t} + \left[\frac{\alpha_{3xx}}{\alpha_3} - \beta_3^2 + 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)\right]_x &= 0.
\end{aligned}$$

Далее вводим новые три комплексные функции для $q_j (j=1,2,3)$ в виде

$$\begin{aligned}
q_1 &= \alpha_1 e^{-i\partial_x^{-1}\beta_1},\\
q_2 &= \alpha_2 e^{-i\partial_x^{-1}\beta_2},\\
q_3 &= \alpha_3 e^{-i\partial_x^{-1}\beta_3}.
\end{aligned}$$

Прямой расчет показывает, что эти функции подчиняются следующему трехкомпонентному НУШ:

$$\begin{aligned}
iq_{1t} + q_{1xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2)q_1 &= 0,\\
iq_{2t} + q_{2xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2)q_2 &= 0,\\
iq_{3t} + q_{3xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2)q_3 &= 0.
\end{aligned} \qquad (3.1.12)$$

Таким образом, мы доказали, что трехкомпонентное НУШ (3.1.12) является геометрически эквивалентным аналогом трехслойного спинового уравнения (3.1.10).

Теперь рассмотрим четырехслойное спиновое уравнение вида

$$\begin{aligned}
\vec{A}_t + \vec{A}\wedge\vec{A}_{xx} + u_1\vec{A}_x + 2v_1\vec{H}\wedge\vec{A} &= 0,\\
\vec{B}_t + \vec{B}\wedge\vec{B}_{xx} + u_2\vec{B}_x + 2v_2\vec{H}\wedge\vec{B} &= 0,\\
\vec{C}_t + \vec{C}\wedge\vec{C}_{xx} + u_3\vec{C}_x + 2v_3\vec{H}\wedge\vec{C} &= 0,\\
\vec{D}_t + \vec{D}\wedge\vec{D}_{xx} + u_4\vec{D}_x + 2v_4\vec{H}\wedge\vec{D} &= 0.
\end{aligned}$$

В матричной форме это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned}
iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + iu_1A_x + v_1[\sigma_3, A] &= 0,\\
iB_t + \frac{1}{2}[B, B_{xx}] + iu_2B_x + v_2[\sigma_3, B] &= 0,\\
iC_t + \frac{1}{2}[C, C_{xx}] + iu_3C_x + v_3[\sigma_3, C] &= 0,\\
iD_t + \frac{1}{2}[D, D_{xx}] + iu_4D_x + v_4[\sigma_3, D] &= 0,
\end{aligned} \tag{3.1.13}$$

где $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$, $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3)$, $\vec{D} = (D_1, D_2, D_3)$, $\vec{A}^2 = \vec{B}^2 = \vec{C}^2 = \vec{D}^2 = 1$. Здесь u_j и $v_j (j = 1,2,3,4)$ - потенциалы связи.

Аналогичная алгебра, как и в предыдущих разделах, показывает, что четырехкомпонентное НУШ, геометрически эквивалентно четырехслойному спиновому уравнению (3.1.13) в виде

$$\begin{aligned}
iq_{1t} + q_{1xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 + |q_4|^2)q_1 &= 0,\\
iq_{2t} + q_{2xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 + |q_4|^2)q_2 &= 0.\\
iq_{3t} + q_{3xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 + |q_4|^2)q_3 &= 0.\\
iq_{4t} + q_{4xx} + 2(|q_1|^2 + |q_2|^2 + |q_3|^2 + |q_4|^2)q_4 &= 0.
\end{aligned}$$

Обобщая выше приведенные результаты для одно-, двух-, трех- и четырехслойных случаев, можно сделать вывод: N – компонентное НУШ (3.1.1) является геометрическим аналогом многослойного спинового уравнения (3.1.2). *Теорема 3.1 доказано*.

Выводы по разделу

В данном разделе показано, что многослойное спиновое уравнение возникает из потока взаимодействующих кривых. А их геометрические эквивалентные аналоги получены из течений неупругих кривых в евклидовом пространстве. Сведения о геометрических потоках кривых и поверхностей смотрите в (Приложения А, Б, В). Также получены новые результаты при рассмотрении различных классов кривых и поверхностей. Найдены геометрические аналоги, эквивалентные спиновым уравнениям N - слоя. Доказано, что такими аналогами являются многокомпонентное векторное НУШ. Результаты данного раздела опубликованы в работе [97].

4 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ И СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Интегрируемые спиновые системы являются важной частью интегрируемых системи описывают нелинейную динамику процесса намагниченности в магнитных системах. Данная глава является продолжением главы 2, посвященной изучению интегрируемых двухслойных спиновых систем, соотносимых с системой Манакова, и их связи с интегрируемым движением кривых и поверхностей.

В этом разделе построим преобразование Дарбу (ПД) [98-104] для общей $su(3)$-значной Γ-спин системы. С помощью него мы получим формулу для солитонных решений этой спиновой системы. Затем приведем явные выражения для односолитонного решения двухслойной $su(2)$-значной спин системы.

ПД представляет собой одно из наиболее плодотворных подходов к построению солитонных решений интегрируемых нелинейных уравнений. Оно преобразует решения дифференциальных уравнений на решения того же класса дифференциальных уравнений. Ключевую роль играет так называемая матрица Дарбу L. Кратко объясним понятие матрицы Дарбу. Для этой цели рассмотрим пространственную часть представления Лакса

$$\Re_x = U\Re.$$

Рассмотрим преобразование

$$\Re' = L\Re,$$

где матрица Дарбу L удовлетворяет уравнению

$$L_x = U' L - LU.$$

Тогда $\Re'$ удовлетворяет уравнению

$$\Re'_x = U'\Re'.$$

ПД впервые было описано в работе Дарбу и других, в дифференциальной геометрии поверхностей. Также напомним, что некоторые конкретные примеры таких преобразований были даны Эйлером и Лапласом. В 1970-е годы, ПД было вновь открыто в теории солитонов. На самом деле, роль ПД является более важной, чем в качестве чисто технического метода получения решения некоторых дифференциальных уравнений.

4.1 Преобразование Дарбу и точные решения Γ-спин системы
В этом пункте мы построим ПД для уравнения

$$i\Gamma_t + \frac{1}{2}[\Gamma, \Gamma_{xx}] = 0 \qquad (4.1.1)$$

с соответствующей линейной системой

$$\begin{aligned} \Phi_x &= U\Phi, \\ \Phi_t &= V\Phi, \end{aligned} \qquad (4.1.2)$$

где

$$\begin{aligned} U &= -i\lambda\Gamma, \\ V &= -2i\lambda^2\Gamma + \frac{1}{2}\lambda[\Gamma, \Gamma_x]. \end{aligned} \qquad (4.1.2')$$

Здесь

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \in su(3).$$

Для построения решения Г - спин системы (4.1.1), рассмотрим следующее преобразование решений уравнений (4.1.2)

$$\Phi^{[1]} = L\Phi^{[0]},$$

где

$$L = \lambda N - I. \qquad (4.1.3)$$

Потребуем, что $\Phi^{[1]}$ удовлетворяет тому же представлению Лакса, что и (4.1.2), тогда

$$\begin{aligned} \Phi_x^{[1]} &= U^{[1]}\Phi^{[1]}, \\ \Phi_t^{[1]} &= V^{[1]}\Phi^{[1]}, \end{aligned}$$

где $U^{[1]}-V^{[1]}$ зависит от $\Gamma^{[1]}$ как $U-V$ от Γ. Матрица L подчиняется следующим уравнениям

$$\begin{aligned} L_x + LU &= U^{[1]}L, \\ L_t + LV &= V^{[1]}L. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Из уравнения (4.1.4), с учетом (4.1.3), получаем уравнения для N следующего вида:

$$\begin{aligned} N_x &= i\Gamma^{[1]} - i\Gamma, \\ N_t &= -\Gamma^{[1]}\Gamma_x^{[1]} + \Gamma\Gamma_x \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

и

$$\Gamma^{[1]} = N\Gamma N^{-1}, \tag{4.1.6}$$

где $\Gamma^{[0]}$ - известное тривиальное решение, $\Gamma^{[1]}$ - искомое новое решение, а N - должно выражаться через решение линейной системы (4.1.2).

Кроме того, мы имеем следующую полезную вторую форму ПД для Γ:

$$\Gamma' = \Gamma - iN_x. \tag{4.1.7}$$

Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} H_x &= -i\Gamma H\Lambda, \\ H_t &= -2i\Gamma H\Lambda^2 + \Gamma\Gamma_x H\Lambda, \end{aligned}$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

$det H \neq 0$ и $\lambda_k (k=1,2,3)$ комплексные постоянные. Предположим теперь, что матрицу N можно записать в виде:

$$N = H\Lambda^{-1}H^{-1} = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{pmatrix}. \tag{4.1.8}$$

Обратную матрицу запишем в виде

$$N^{-1} = H\Lambda H^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \tag{4.1.9}$$

или

$$N^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n_{22}n_{33} - n_{23}n_{32} & -(n_{12}n_{33} - n_{13}n_{32}) & n_{12}n_{23} - n_{13}n_{22} \\ -(n_{21}n_{33} - n_{23}n_{31}) & n_{11}n_{33} - n_{31}n_{13} & -(n_{11}n_{23} - n_{21}n_{13}) \\ n_{32}n_{21} - n_{31}n_{22} & -(n_{11}n_{32} - n_{31}n_{12}) & n_{11}n_{22} - n_{21}n_{12} \end{pmatrix}.$$

где $n = detN$ примет форму

$$n = n_{11}n_{22}n_{33} + n_{12}n_{23}n_{31} + n_{13}n_{32}n_{21} - n_{31}n_{22}n_{13} - n_{12}n_{21}n_{33} - n_{11}n_{23}n_{32}. \tag{4.1.10}$$

Из этих уравнений следует, что N подчиняется уравнениям

$$\begin{aligned} N_x &= iN\Gamma N^{-1} - i\Gamma, \\ N_t &= \Gamma\Gamma_x - N\Gamma\Gamma_x N^{-1}, \end{aligned}$$

которые эквивалентны уравнениям (4.1.5), как и ожидалось. Матрица Γ и решения матричной системы (4.1.2) подчиняются условиям

$$\Phi^{\dagger} = \Phi^{-1}, \quad \Gamma^{\dagger} = \Gamma,$$

что следует из уравнений

$$\Phi_x^{\dagger} = i\lambda\Phi^{\dagger}\Gamma^{\dagger}, \quad (\Phi^{-1})_x = i\lambda\Phi^{-1}\Gamma^{-1}.$$

Здесь † обозначает эрмитово сопряжение. После некоторых расчетов придем к формулам $\lambda_2 = \lambda_3 = \overline{\lambda}_1$, и

$$H=\begin{pmatrix}\psi_1(\lambda_1;t,x,y) & \overline{\psi}_2(\lambda_1;t,x,y) & \overline{\psi}_3(\lambda_1;t,x,y)\\ \psi_2(\lambda_1;t,x,y) & -\overline{\psi}_1(\lambda_1;t,x,y) & 0\\ \psi_3(\lambda_1;t,x,y) & 0 & -\overline{\psi}_1(\lambda_1;t,x,y)\end{pmatrix},$$

$$H^{-1}=\frac{1}{\mathrm{W}\,\overline{\psi}_1}\begin{pmatrix}\overline{\psi}_1^{\,2} & \overline{\psi}_1\overline{\psi}_2 & \overline{\psi}_1\overline{\psi}_3\\ \overline{\psi}_1\psi_2 & -(|\overline{\psi}_1|^2+|\psi_2|^2) & \psi_2\overline{\psi}_3\\ \overline{\psi}_1\psi_3 & \overline{\psi}_2\psi_3 & -(|\overline{\psi}_1|^2+|\psi_2|^2\end{pmatrix},$$

где

$$\mathrm{W} \;=\; |\psi_1|^2+|\psi_2|^2+|\psi_3|^2 .$$

И, наконец, для матрицы N получим следующее выражение:

$$N=\begin{pmatrix}n_{11} & n_{12} & n_{13}\\ n_{21} & n_{22} & n_{23}\\ n_{31} & n_{32} & n_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{\mathrm{W}}\begin{pmatrix}n_{11}\mathrm{W} & n_{12}\mathrm{W} & n_{13}\mathrm{W}\\ \overline{\psi}_1\psi_2\varepsilon_{12} & \dfrac{|\psi_2|^2}{\lambda_1}+\dfrac{|\overline{\psi}_1|^2+|\psi_3|^2}{\lambda_2} & \psi_2\overline{\psi}_3\varepsilon_{12}\\ \overline{\psi}_1\psi_3\varepsilon_{13} & \overline{\psi}_2\psi_3\varepsilon_{13} & \dfrac{|\psi_3|^2}{\lambda_1}+\dfrac{|\psi_1|^2+|\psi_2|^2}{\lambda_3}\end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_{ij}=\lambda_i^{-1}-\lambda_j^{-1}\ (i,\,j=1,2,3)$,

$$n_{11}\mathrm{W} \;=\; \frac{|\psi_1|^2}{\lambda_1}+\frac{|\psi_2|^2}{\lambda_2}+\frac{|\psi_3|^2}{\lambda_3},$$

$$n_{12}\mathrm{W} \;=\; \frac{\psi_1\overline{\psi}_2}{\lambda_1}-\frac{\psi_1\overline{\psi}_2}{\lambda_2}+\frac{\psi_2\,|\psi_3|^2}{\overline{\psi}_1}(\lambda_3^{-1}-\lambda_2^{-1}),$$

$$n_{13}\mathrm{W} \;=\; \frac{\psi_1\overline{\psi}_3}{\lambda_1}-\frac{\psi_1\overline{\psi}_3}{\lambda_3}+\frac{|\psi_2|^2\,\overline{\psi}_3}{\overline{\psi}_1}(\lambda_2^{-1}-\lambda_3^{-1}).$$

Далее можем написать ПД в терминах собственных функций представления Лакса (4.1.10) в виде

$$\Gamma^{[1]}=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}n_{11}m_{11}-n_{12}m_{21}-n_{13}m_{31} & n_{11}m_{12}-n_{12}m_{22}-n_{13}m_{32} & n_{11}m_{13}-n_{12}m_{23}-n_{13}m_{33}\\ n_{21}m_{11}-n_{22}m_{21}-n_{23}m_{31} & n_{21}m_{12}-n_{22}m_{22}-n_{23}m_{32} & n_{21}m_{13}-n_{22}m_{23}-n_{23}m_{33}\\ n_{31}m_{11}-n_{32}m_{21}-n_{33}m_{31} & n_{31}m_{12}-n_{32}m_{22}-n_{33}m_{32} & n_{31}m_{13}-n_{32}m_{23}-n_{33}m_{33}\end{pmatrix},$$

где n_{ij} и $m_{ij}(i, j=1,2,3)$ даются уравнениями (4.1.8)- (4.1.9).

4.2 Односолитонное решение Γ - спин системы

Для построения односолитонного решения Γ -спин системы (4.1.1), рассмотрим начальное тривиальное решение

$$\Gamma^{[0]} = \Sigma. \tag{4.2.1}$$

Тогда решение системы (4.1.2) с учетом (4.1.2') будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= e^{-i\lambda x - 2i\lambda^2 t + i\delta_1} = e^{-\theta + i\delta_1}, \\ \phi_2 &= e^{\theta + i\delta_2}, \\ \phi_3 &= e^{\theta + i\delta_3}, \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

где $\delta_j (j=1,2,3)$ - комплексные постоянные, и

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2 = -i\lambda_1 x - 2i\lambda_1^2 t.$$

Далее, получим

$$\Gamma^{[1]} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{[1]} & \Gamma_{12}^{[1]} & \Gamma_{13}^{[1]} \\ \Gamma_{21}^{[1]} & \Gamma_{22}^{[1]} & \Gamma_{23}^{[1]} \\ \Gamma_{31}^{[1]} & \Gamma_{32}^{[1]} & \Gamma_{33}^{[1]} \end{pmatrix} = \Phi^{-1}\Sigma\Phi. \tag{4.2.3}$$

Односолитонное решение Γ – спин системы (4.1.1) имеет вид (4.2.3), где $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ задан в виде (4.2.2).

4.3 Односолитонное решение двухслойного спинового уравнения

Далее, находим односолитонное решение связанного спинового уравнения

$$\begin{aligned} iA_t + \frac{1}{2}[A, A_{xx}] + iu_1 A_x + F &= 0, \\ iB_t + \frac{1}{2}[B, B_{xx}] + iu_2 B_x + E &= 0. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Его начальное тривиальное решение имеет вид

$$A^{[0]} = \sigma_3, \quad B^{[0]} = \sigma_3.$$

Тогда новое решение для (4.3.1) будем искать в виде

$$A^{[1]} = g^{-1}\sigma_3 g, \quad B^{[1]} = h^{-1}\sigma_3 h,$$

где

$$g = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\bar{\phi}_2 \\ \phi_2 & \bar{\phi}_1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} \phi_1 & -\bar{\phi}_3 \\ \phi_3 & \bar{\phi}_1 \end{pmatrix}.$$

Искомое решение двухслойной спиновой системы (4.3.1) на языке решения соответствующей линейной системы имеет вид

$$A^{[1]} = \frac{1}{\Delta_1}\begin{pmatrix} |\phi_1|^2 - |\phi_2|^2 & -2\bar{\phi}_1\bar{\phi}_2 \\ -2\phi_1\phi_2 & |\phi_2|^2 - |\phi_1|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 & A^- \\ A^+ & -A_3 \end{pmatrix},$$

$$B^{[1]} = \frac{1}{\Delta_2}\begin{pmatrix} |\phi_1|^2 - |\phi_3|^2 & -2\bar{\phi}_1\bar{\phi}_3 \\ -2\phi_1\phi_3 & |\phi_3|^2 - |\phi_1|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_3 & B^- \\ B^+ & -B_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\Delta_1 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2, \quad \Delta_2 = |\phi_1|^2 + |\phi_3|^2.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
|\phi_1|^2 &= \phi_1\bar{\phi}_1 = e^{-\theta + i\delta_1} e^{-\bar{\theta} - i\delta_1} = e^{-(\theta+\bar{\theta})} = e^{-2\theta_1}, \\
|\phi_2|^2 &= e^{\theta + i\delta_2} e^{\bar{\theta} - i\delta_2} = e^{\theta+\bar{\theta}} = e^{2\theta_1}, \\
|\phi_3|^2 &= e^{2\theta_1}, \\
\phi_1\phi_2 &= e^{-\theta + i\delta_1} e^{\theta + i\delta_2} = e^{i(\delta_1+\delta_2)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, односолитонное решение двухслойной спиновой системы (4.3.1) в компонентах матриц A и B записывается в виде

$$A^{+}=-\frac{2\phi_1\phi_2}{\Delta_1}=-\frac{e^{i(\delta_1+\delta_2)}}{e^{-2\theta_1}+e^{2\theta_1}}=-\frac{e^{i(\delta_1+\delta_2)}}{2ch2\theta_1},$$

$$A_3=\frac{|\phi_1|^2-|\phi_2|^2}{\Delta_1}=\frac{e^{-2\theta_1}-e^{2\theta_1}}{e^{-2\theta_1}+e^{2\theta_1}}=-\frac{sh2\theta_1}{ch2\theta_1}=-th2\theta_1,$$

$$B^{+}=-\frac{2\phi_1\phi_3}{\Delta_2}=-\frac{e^{i(\delta_1+\delta_3)}}{2ch2\theta_1},$$

$$B_3=-\frac{sh2\theta_1}{ch2\theta_1}=-th2\theta_1.$$

Для того, чтобы найти односолитонное решение связанного уравнения (4.3.1), можно использовать обратное преобразование [33, p.1750115]. Оно позволяет нам находить решения связанного спинового уравнения (4.3.1), если известны решения Γ - спин системы (4.1.1). Таким образом, односолитонное решение связанного спинового уравнения (4.3.1) имеет вид

$$A^{[1]} = \frac{1}{1-\Gamma_{33}^{[1]}}\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^{[1]}-\Gamma_{22}^{[1]} & 2\Gamma_{12}^{[1]}\\ 2\Gamma_{21}^{[1]} & \Gamma_{22}^{[1]}-\Gamma_{11}^{[1]}\end{pmatrix},$$

$$B^{[1]} = \frac{1}{1-\Gamma_{22}^{[1]}}\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^{[1]}-\Gamma_{33}^{[1]} & 2\Gamma_{13}^{[1]}\\ 2\Gamma_{31}^{[1]} & \Gamma_{33}^{[1]}-\Gamma_{11}^{[1]}\end{pmatrix},$$

где $\Gamma_{ij}^{[1]}$ $(i, j=1, 2, 3)$ дается формулами (4.1.6) и (4.1.7). А также, если известны решения связанного спинового уравнения (4.3.1), тогда решение Γ – спин системы (4.1.1) находится формулой (2.6.1).

Выводы по разделу

В этом разделе мы представили ПД для Γ -спин системы, которая является интегрируемой $su(3)-$ значной спиновой системой. В частности, мы получили явную формулу для ее односолитонного решения. Также показали, как построить солитонные решения связанного спинового уравнения для $su(2)-$ значных спиновых систем используя формулы ПД Γ -спин системы. Результаты исследования опубликованы в работе [32].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках диссертационной работыполучены следующие результаты:

1. Получен новый метод установления эквивалентности между интегрируемыми нелинейными уравнениями на основе свойств алгебр Ли.
2. Найдены *n*-слойные спиновые системы.
3. Доказана геометрическая эквивалентность между многослойными интегрируемыми уравнениями.
4. Доказана калибровочная эквивалентность между двухслойными интегрируемыми уравнениями.
5. Получены решения для обобщенного УФГ, Г-спин системы и двухслойной спиновой системы.
6. Определена связь между решениями Г-спин системы и двухслойной спиновой системы.

Результаты исследования опубликованы в виде 3 статьей в рецензируемых зарубежных журналах, входящих в базу данных Web of Science и Scopus, 1 статьи в сборнике докладов зарубежной конференции из базы Scopus, а также 1 статья выпущена в журнале из списка КОКСНВО и 2 работы в трудах международных и республиканских конференций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи / пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 450 с.

2 Лэм Дж.Л. Введение в теорию солитонов / пер. с англ.– М.: Мир, 1983. – 294 с.

3 Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж. и др. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / пер. с англ.– М.: Мир, 1988.– 624 с.

4 Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике / пер. с англ.– М.: Мир, 1989. – 324 с.

5 Novikov S.P., Manakov S.V., Pitaevskii L.P. et al. Theory of solitons: the inverse scattering method. – NY: Plenum, 1984. – 276 p.

6 Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных эволюционных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I //Функциональный анализ и его приложения. – 1974. – Т.8, №3. – С. 43-53.

7 Захаров В.Е., Шабат А.Б. Интегрирование нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. II //Функциональныйанализиегоприложения. – 1979. –Т.13, №3. –С.13-22.

8 Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. etal. MethodforsolvingtheSine-Gordonequation // Phys. Rev. Lett. – 1973. – Vol. 30. – P.1262-1264.

9 Chang N.-H., Shatah J.,Unlenbeck K. Schrödinger maps // Commun. Pure Appl. Math. – 2000. – Vol.53. – P. 590-602.

10 Ishimori Y. Multi-vortex solutions of a two-dimensional nonlinear wave equation // Prog. Theor. Phys.– 1984. –Vol.72. – P. 33-37.

11 Ma L.-Y., Shen S.-F., Zhu Z.-N. From discrete nonlocal nonlinear Schrödinger equation to coupled discrete Heisenberg ferromagnet equation // Applied Mathematics Letters. – 2022. – Vol.130. – P.108002.

12 Lamb G.L. Solitons on moving space curves // J. Mathematical Phys.– 1977. –Vol.18. –P.1654-1661.

13 Wahlquist H.D., Estabrook F.B. Prolongation Structures of Nonlinear Evolution Equations // J. Math. Phys. – 1976. –Vol.17. –P.1293-1297.

14 Herman R. Pseudopotentials of Estabrook and Wahlquist, the Geometry of Solitons, and the Theory of Connections //Phys. Rev. Lett. – 1976. –Vol.36. –P. 835.

15 Lakshmanan K.M., Tamizhmani K.M. Motion of strings, embedding problem and soliton equations // Appl. Sci. Res.– 1981. –Vol.37. –P.127-143.

16 Lakshmanan M., Myrzakulov R., Vijayalakshmi S. et al. Motion of curves and surfaces and nonlinear evolution equations in (2+1) dimensions// J. Math. Phys.– 1998. – Vol.39. –P.3765-3771.

17 Myrzakulov R., Mamyrbekova G.K., NugmanovaG.N. et al. Integrable (2+1)-dimensional spin models with self-consistent potentials// Symmetry.–2015. – Vol.7, №3. –P.1352-1375.

18 Myrzakulov R., Mamyrbekova G.K., Nugmanova G.N. et al. Integrable Motion of Curves in Self-Consistent Potentials: Relation to Spin Systems and Soliton Equations // Physics Letters A. –2014. –Vol.378, №30-31. –P.2118-2123.

19 Myrzakulov R., Danlybaeva A.K., Nugmanova G.N. Geometry and multidimensional soliton equations // Theoretical and Mathematical Physics.– 1999. –Vol.118, №13. – P.441-451.

20 Ding Q., Wang W., Wang Y.D. A motion of spacelike curves in the Minkowski 3-space and the KdV equation // Phys. Lett. A. – 2010. Vol.374. – P. 3201-3205.

21 Нугманова Г.Н., Мырзакул А.Р. Об интегрируемости спиновой системы с самосогласованным потенциалом // Современные проблемы математического и компьютерного моделирования в условиях развития цифровой индустрии Казахстана: сб. матер. республ. науч.-практ. конф.– Астана, 2018. – С.101-106.

22 Martina L, Myrzakul K., Myrzakulov R. et al. Deformation surfaces, integrable systems and Chern - Simons theory// Journal of Mathematical Physics.– 2001. – Vol.42, №13. – P.1397-1417.

23 Bordag L.A., Yanovski A.B. Polynomial Lax pairs for the chiral O(3) field equations and the Landau-Lifshitz equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1995. – Vol.28. –P.4007-4013.

24 Yanovski A.B. Bi-Hamiltonian formulation of the O(3) chiral fields equations hierarchy via a polynomial bundle // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – Vol. 31. – P. 8709-8726.

25 Anco S.C., Myrzakulov R. Integrable generalizations of Schrodinger maps and Heisenberg spin models from Hamiltonian flows of curves and surfaces// Journal of Geometry и Physics.– 2010. –Vol.60. –P.1576-1603.

26 Myrzakulov R., Martina L., Myrzakul K. et al. Integrable Heisenberg ferromagnets и soliton geometry of curves и surfaces // In book: Nonlinear Physics: Theory и Experiment. II", World Scientific. – London, 2003. – P. 248-253.

27 Gadzhimuradov T.A., Agalarov A.M. Towards a gauge-equivalent magnetic structure of the nonlocal nonlinear Schrödinger equation // Phys. Rev. A.– 2016. – Vol.93. – P. 062124.

28 Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Nugmanova G. et al. A (2+1)-dimensional integrable spin model: Geometrical and gauge equivalent counterpart, solitons and localized coherent structures// Physics Letters A.– 1997. –Vol.233. – P. 391-396.

29 Myrzakulov R., Vijayalakshmi S., Syzdykova R. et al. On the simplest (2+1) dimensional integrable spin systems and their equivalent nonlinear Schrödinger equations// J. Math. Phys.– 1998. –Vol.39. –P.2122-2140.

30 Myrzakulov R., Nugmanova G., Syzdykova R. Gauge equivalence between (2+1) - dimensional continuous Heisenberg ferromagnetic models and nonlinear Schrödinger-type equations // Journal of Physics A: Mathematical & Theoretical.– 1998. – Vol.31, №147. –P. 9535-9545.

31 Makhankov V.G., Myrzakulov R., Pashaev O.K. Gauge Equivalence, Supersymmetry and Classical Solutions of the ospu(1,1/1) Heisenberg Model and the Nonlinear Schrödinger Equation // https://arxiv.org/pdf/1612.09124.pdf. 27.12.2018.

32 Myrzakul A., Myrzakulov R. Darboux transformations and exact soliton solutions of integrable coupled spin systems related with the Manakov system // https://arxiv.org/pdf/1607.08151.pdf.27.07. 2018.

33 Myrzakul A., Myrzakulov R. Integrable motion of two interacting curves, spin systems and the Manakov system //International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2017.– Vol.14, №07. – P. 1750115.

34 Jiang N., Zhang M., Guo J. et al. Fifth-order generalized Heisenberg supermagnetic models //Chaos, Solitons and Fractals. – 2020. – Vol. 133. – P. 109644-1-109644-15.

35 Yan Zh., Gao B., Chen M. et al. On the higher order Heisenberg supermagnet model in (2+1)-dimensions //Chaos, Solitons and Fractals.– 2019. – Vol.118. –P.94-105.

36 Han R., Sun H., Jiang N. et al. On the Higher-Order Inhomogeneous Heisenberg Supermagnetic Models //Journal of Nonlinear Mathematical Physics.– 2021. –Vol.28. –P.345-362.

37 Klauss R., Phillips A., Vega-Guzmán J.M. Analitical and Data-Driven Wave Approximation of an Extended Schrodinger Equation //Symmetry.– 2022. – Vol.14. –P.465-1-465-11.

38 Lakshmanan M. On the geometrical interpretation of solitons //Phys. Lett. – 1978. – Vol.64, №4. – P.354-356.

39 Захаров В.Е., Тахтаджян Л.А. Эквивалентность нелинейного уравнения Шредингера и уравнения ферромагнетика Гейзенберга // Теоретическая и математическая физика. –1979. – Т.38, №1. – С.26-34.

40 Yanovski A.B. Linear bundles of Lie algebras and their applications // J. Math. Phys. – 2000. – Vol.41. – P.7869-7882.

41 Gerdjikov V.S., Vilasi G., Yanovski A.B. Linear Bundles of Lie Algebras and Compatible Poisson Structures// Lecture Notes in Physics. – 2008. – Vol.748. – P. 547-611.

42 Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 с.

43 Inui T., Tanabe Y., Onodera Y. Group Theory and Its Applications in Physics. – Tokyo: Springer, 1990. – 397 p.

44 Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М.: Наука, 1981. – 759 с.

45 Lax P.D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves //Comm. Pure Appl. Math. – 1968. – Vol.21, №5. – P.467-490.

46 Ding Q., Inoguchi J. Schrödinger flows, binormal motion of curves and the second AKNS hierarchies // Chaos Solitons Fractals. – 2004. – Vol.21. – P.669-677.

47 Ding, Q. A note on the NLS and the Schrödinger flow of maps // Phys. Lett. A. – 1998. – Vol.248. – P.49-56.

48 Ding Q., Zhong S.P. The complex 2-sphere in C3 and Schrödinger flows // Sci. China Math. – 2021. – Vol.63. – P.777-788.

49 Ding W.Y., Wang Y.D. Schrödinger flows of maps into symplectic manifolds // Sci. China A. – 1998. – Vol.41. –P.746-755.

50 Gurses M., Pekcan A. Nonlocal nonlinear Schrödinger equations and their soliton solutions // J. Math. Phys.– 2018. –Vol.59. – P. 1-17.

51 Murugesh S., Balakrishnana R. New geometries associated with the nonlinear Schrödinger equation // Eur. Phys. J. B Condens. Matter Phys. – 2002. – Vol.29. –P.193-196.

52 Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation // Phys. Rev. Lett. – 2013. –Vol.110. –P. 1-5.

53 Ma L.-Y., Zhu Z.-N. Nonlocal nonlinear Schrödinger equation and its discrete version: soliton solutions and gauge equivalence // J. Math. Phys. – 2016. – Vol. 57. – P. 083507.

54 Sarma A.K., Miri M.-A., Musslimani Z.H. et al Continuous and discrete Schrödinger systems with parity-time-symmetric nonlinearities // Phys. Rev. E. – 2014. – Vol.89. – P.052918.

55 Terng C.-L., Uhlenbeck K. Schrödinger flows on Grassmannians // AMS/IP Stud. Adv. Math. – 2006. – Vol.36. –P.235-256.

56 Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Inverse scattering transform for the integrable nonlocal nonlinear Schrödinger equation // Nonlinearity. – 2016. – Vol.29, №3. –P.915-946.

57 Zhong, S. A motion of complex curves in C3 and the nonlocal nonlinear Schrödinger equation // J. Nonlinear Sci. Appl. – 2019. – Vol.12. – P.75-85.

58 Takhtajan L.A. Integration of the continuous Heisenberg spin chain through the inverse scattering method // Phys. Lett. – 1977. – Vol.64A, №2b. – P.235-237.

59 Senthilkumar C., Lakshmanan M., Grammaticos B., Ramani A. Nonintegrability of (2+1)-dimensional continuum isotropic Heisenberg spin system: Painlevé analysis// Phys. Lett. A.– 2006. –Vol.356.–P.339-345.

60 Nugmanova G., Zhunussova Z., Yesmakhanova K. et al. Integrable Heisenberg Ferromagnet Equations with self-consistent potentials // International Journal of Mathematical, Computational, Statistical, Natural и Physical Engineering.– 2015. –Vol.9, №8. –P.328-331.

61 Myrzakulov R., Daniel M., Amuda R. Nonlinear spin-phonon excitations in an inhomogeneous compressible biquadratic Heisenberg spin chain //Physica A. – 1997. – Vol.234, №13-4. – P.715-724.

62 Myrzakulov R., Rahimov F.K. et al. On the geometry of stationary Heisenberg ferromagnets // In book: Non-linear waves: Classical and Quantum Aspects.– Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2004. – P.543-549.

63 Myrzakulov R., Serikbaev N.S. et al. On continuous limits of some generalized compressible Heisenberg spin chains // Journal of NATO Science. –2004. –Vol.1(53). – P.535-542.

64 Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. – Киев: Наукова Думка, 1983. – 190 с.

65 Zakharov V.E., Takhtajan L.A. Equivalence of the nonlinear Schrödinger equation and the equation of a Heisenberg ferromagnet // Theor. Math. Phys. – 1979. –Vol.38. –P.17-23.

66 GrayA. Modern differential geometry of curves and surfaces. – Boca Raton:CRC Press, 1995. – 664 p.

67 Gurses M.Motion of curves on two-dimensional surfaces and soliton equations // Phys. Lett. A.– 1998. –Vol.241. –P.329-334.

68 Peng W., Pu J., Chen Y. PINN Deep Learning for the Chen-Lee-Liu Equation: Rogue Wave on the Periodic Background //https://arxiv.org/pdf/2105.13027.pdf. 27.05.2021.

69 Chen H.H., Lee Y.C., Liu C.S. Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method// Phys. Scr. – 1979. – Vol.20. – P.490-492.

70 Myrzakul A., Nugmanova G., Serikbayev N. et al. Surfaces and curves induced by nonlinear Schrödinger-type equations and their spin systems //Symmetry. – 2021. –Vol.13, №10. –P.1827-1-1827-18.

71 Myrzakulov R. Integrability of the Gauss-Codazzi-Mainardi equation in 2+1 dimensions // Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics:procced. of the internat. conf. "Progress in Nonlinear sciences". – N-Novgorod, 2001. – P.314-319.

72 Chen H., Zhou Z.X. Global explicit solutions with *n* double spectral parameters for the Myrzakulov-I Equation // Mod. Phys. Lett. B.– 2016. –Vol.30, №29. – P. 650358.

73 Yesmakhanova K.R., Nugmanova G.N. et al. Integrable inhomogeneous Lakshmanan-Myrzakulov equation // https://arxiv.org/pdf/nlin/0604034. 14.01.2020.

74 Zhang Z.-H., Deng M., Zhao W.-Z. et al. On the integrable inhomogeneous Myrzakulov-I equation // https://arxiv.org/pdf/nlin/0603069.30.03.2020.

75 Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable nonlocal nonlinear equations // Studies in Applied Mathematics.– 2016. –Vol.139. –P.7-59.

76 Hirota R. Nonlinear partial difference equations. V. Nonlinear equations reducible to linear equations // J. Phys. Soc. Japan.– 1979. – Vol.46B. – P.312-319.

77 Doliwa A., Santini P.M. An elementary geometric characterization of the integrable motions of a curve // Phys. Lett. A. – 1994. – Vol.185. – P.373-384.

78 Gollek H. Duals of vector fields and of null curves // Result. Math. – 2007. Vol.50. – P.53-79.

79 Lamb G.L. Solitons on moving space curves // J. Math. Phys. – 1977. – Vol. 18. – P.1654-1661.

80 Pessers V., der Veken J.V. On holomorphic Riemannian geometry and submanifolds of Wick-related spaces // J. Geom. Phys. – 2016. – Vol.104. – P.163-174.

81 Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable nonlocal nonlinear equations // Stud. Appl. Math. – 2017. – Vol.139. – P.7-59.

82 Ablowitz M.J., Musslimani Z.H. Integrable space-time shifted nonlocal nonlinear equations // Phys. Lett. A. – 2021. – Vol. 409. – P.127516.
83 Липовский В.Д., Широков А.В. Пример калибровочной эквивалентности многомерных интегрируемых уравнений // Функциональный анализ и его приложения. – 1989. – Т.23, №3. – С.65-66.
84 Нугманова Г.Н. Калибровочная связь между решениями двух нелинейных уравнений // Тр. междунар. конф. "Дифференциальные уравнения и теория колебаний". – Алматы, 2002. – С.56-57.
85 Makhankov V.G., Pashaev O.K. On the gauge equivalence of the Landau-Lifshitz and the nonlinear Schrödinger equations on symmetric spaces // Phys. Lett. A. – 1983. – Vol.95. – P.95-100.
86 Cen J., Correa F., Fring A. Nonlocal gauge equivalence: Hirota versus extended continuous Heisenberg and Landau-Lifschitz equation // J. Phys. A Math. Theor. – 2020. – Vol.53. – P.195201.
87 Мырзақұл А. Интегрируемость двух взаимодействующих кривых и геометрически эквивалентный спиновый аналог уравнения Манакова // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева.– 2016. –Вып.113, №4. –С.23-26.
88 Nugmanova G., Myrzakul A. Integrability of the two-layer spin system // Geometry, Integrability and Quantization.– 2019. – Vol. 20. – P.208-214.
89 Мырзакул А.Р. Интегрируемость двух параметрического уравнения M-LIII //Ломоносов – 2018: матер. 14-й междунар. науч. конф. студен., магистр. и молод. уч.– Астана, 2018. – Ч. 1.– С.32-33.
90 Kostov N.A., Dandoloff R., Gerdjikov V.S. et al. The Manakov system as two moving interacting curves // Topics in Contemporary Differential Geometry Complex Analysis and Mathematical Physics. – Danvers, 2007. – P.168-178.
91 Manakov S.V. On the theory of two-dimensional stationary self-focusing of electromagnetic waves/ /Sov. Phys. JETP.– 1974. –Vol.38. – P. 248-253.
92 Hasimoto H. A soliton on a vortex filament // J. Fluid. Mech. – 1972. – Vol. 51. –P.477-485.
93 Gao X.Y. Looking at a nonlinear inhomogeneous optical fiber through the generalized higher-order variable-coefficient Hirota equation// Applied Mathematics Letters.– 2017. –Vol.73. – P. 143-149.
94 Захаров В.Е., Манаков С.В. Многомерные нелинейные интегрируемые системы и методы построения их решений // Записки научных семинаров ЛОМИ.– 1984. – Т.133. – С.77-91.
95 Захаров В.Е., Манаков С.В. Построение многомерных нелинейных интегрируемых систем и их решений // Функциональный анализ и его приложения. – 1985. – Т.19, №2. – С.11-25.
96 Fukumoto Y., Miyazaki T. Three-dimensional distortions of a vortex filament with axial velocity // J. Fluid. Mech. – 1991. – Vol.22. – P.369-416.
97 Myrzakul A., Myrzakulov R. Integrable geometric flows of interacting curves/surfaces, multilayer spin systems and the vector nonlinear Schrödinger equation // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics.– 2017. – Vol.14, №10. – P. 1750136-1-1750136-18.

98 Chi Ch., Zi-Xiang Z. Darboux Tranformation and Exact Solutions of the Myrzakulov-I Equations // Chin. Phys. Lett. – 2009. –Vol.26, №8. – P. 080504.

99 Hai C., Zi-Xiang Z. Darboux Transformation with a Double Spectral Parameter for the Myrzakulov-I Equation // Chin. Phys. Lett. – 2014. – Vol.31, №12. – P. 120504.

100 Yersultanova Z.S., Zhassybayeva M., Yesmakhanova K. et al. Darboux Transformation Exact Solutions of the Heisenberg Ferromagnetic Equation with Self-Consistent Potentials// International Journal of Geometric Methods in Modern Physics.– 2016. –Vol.13, №1. – P. 1550134.

101 Rogers C., Schief W.K. Backlund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory.– Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 394 p.

102 Hirota R. Direct methods of finding exact solutions of nonlinear evolution equations // In book: Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons and Their Applications. – NY.: Springer, 1976. –Vol.515. – P. 40-68.

103 Gu C. H., Hu H. S., Zhou Z. X. Darboux Transformations in Integrable Systems. – London: Springer, 2005. – 318 p.

104 Gao X.-Y., Shan W.-R. Shallow water in an open sea or a wide channel: Auto-and non-auto-Bäcklund transformations with solitons for a generalized (2+1)-dimensional dispersive long-wave system // Chaos Solitons Fractals. – 2020. – Vol. 138. – P.109950.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Геометрические потоки погруженных поверхностей

Пусть $\vec{r}_j = \vec{r}_j(x,t), \ j = 1,2,...,N$ радиус-вектор погруженной j -й поверхности в некоторое евклидово пространство. Такие поверхности задаются следующим набором первых фундаментальных форм:

$$\begin{aligned}
I_1 &= dx^2 + 2\vec{r}_{1x}\cdot\vec{r}_{1t}dxdt + \vec{r}_{1t}^{\,2}dt^2,\\
I_2 &= dx^2 + 2\vec{r}_{2x}\cdot\vec{r}_{2t}dxdt + \vec{r}_{2t}^{\,2}dt^2,\\
&\vdots\\
I_N &= dx^2 + 2\vec{r}_{Nx}\cdot\vec{r}_{Nt}dxdt + \vec{r}_{Nt}^{\,2}dt^2,
\end{aligned}$$

где мы предполагали, что $\vec{r}_x^{\,2} = 1.$ Запишем множество вторых фундаментальных форм в виде

$$\begin{aligned}
II_1 &= L_1dx^2 + 2M_1dxdt + N_1dt^2,\\
II_2 &= L_2dx^2 + 2M_2dxdt + N_2dt^2,\\
&\vdots\\
II_N &= L_Ndx^2 + 2M_Ndxdt + N_Ndt^2.
\end{aligned}$$

Наконец, мы можем записать и третье фундаментальные формы. Как известно, третье фундаментальные формы можно записать через первую и вторую формы в виде

$$\begin{aligned}
III_1 &= 2H_1II_1 - K_1I_1,\\
III_2 &= 2H_2II_2 - K_2I_2,\\
&\vdots\\
III_N &= 2H_NII_N - K_NI_N,
\end{aligned}$$

где H_j и K_j $(j = 1,2,...,N)$ - средняя кривизна и гауссова кривизна j -й поверхности, соответственно.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Геометрические потоки кривых

В этом разделе мы хотим представить другой подход к получению геометрического эквивалента однослойного спинового уравнения (3.5). Для этого рассмотрим кривую, которая задается выражением

$$\vec{r}_t = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3,$$

где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ обозначают векторы касательной, нормали и бинормали к кривой, соответственно. Скорости a, b и c зависят от κ и τ, а также их производные по параметру длины дуги x. Параметр длины дуги x определяется неявно через $ds = hdp$, $h = |\vec{r}(p)|$, где p — свободный параметр и не зависит от времени. Из потока (12.1) даются временные эволюции векторов $\vec{e}_j (j = 1,2,3)$:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_3 &= \left(a_x - \tau b + \kappa c\right)\vec{e}_1 + \left(b_x + \tau a\right)\vec{e}_2,\\
\vec{e}_1 &= -\left(a_x - \tau b + \kappa c\right)\vec{e}_3 + \left[\left(\frac{1}{\kappa}(b_x + \tau a\right)_x + \frac{\tau}{\kappa}(a_x - \tau b + \kappa c)\right]\vec{e}_2,\\
\vec{e}_2 &= -\left(b_x + \tau a\right)\vec{e}_3 - \left[\frac{1}{\kappa}(b_x + \tau a)_x + \frac{\tau}{\kappa}(a_x - \tau b + \kappa c)\right]\vec{e}_1,\\
\dot{h} &= 2h(c_x - \kappa a),
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\tau_t &= \left[\frac{1}{\kappa}\left(b_x + \tau a\right) + \frac{\tau}{\kappa}\left(a_x - \tau b\right) + \tau\int^x \kappa a \mathrm{d}x'\right] + \kappa\tau a + \kappa b_x,\\
\kappa_t &= a_{xx} + (\kappa^2 - \tau^2)a + \kappa_x\int^x \kappa a \mathrm{d}x' - 2\tau b_x - \tau_x b.
\end{aligned}$$

Если предположить, что течение является внутренним, а именно, что длина дуги не зависит от времени, то из (12.5) следует, что

$$c_s = \kappa a.$$

Пусть $a = 0$, $b = \kappa$, где κ - вещественная функция, то (12.8) подразумевает, что $c = c_1$, где c_1 - константа. Пусть $c_1 = 0$, тогда система уравнений (12.2)-(12.4) принимает вид

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_3 &= -\tau\kappa\vec{e}_1 + \kappa_x\vec{e}_2, \\
\vec{e}_1 &= \tau\kappa\vec{e}_3 + \left[\frac{\kappa_{xx}}{\kappa} - \tau^2\right]\vec{e}_2, \\
\vec{e}_2 &= -\kappa_x\vec{e}_3 - \left[\frac{\kappa_{xx}}{\kappa} - \tau^2\right]\vec{e}_1.
\end{aligned}
$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Уравнения интегрируемой нити взаимодействующих вихрей

Рассмотрим следующую *r*-форму многослойного спинового уравнения:

$$\vec{r}_{jt} = \vec{r}_{jx} \wedge \vec{r}_{jxx} + u_j \vec{r}_{jx} + 2v_j \vec{H} \wedge \vec{r}_j + \vec{L}_j, \ j = 1,2,\cdots,N,$$

где

$$\vec{L}_j = -\partial_x^{-1}[u_{jx}\vec{r}_{jx} + 2v_{jx}\vec{H} \wedge \vec{r}_j], \ j = 1,2,\cdots,N.$$

Эта замкнутая система уравнений интегрируема. Она описывает (интегрируемое) взаимодействие N вихрей. Действительно, эта система представляет собой замкнутую систему уравнений нити для взаимодействующих N вихрей. В случае $u_j = v_j = 0$ $(j = 1,2,..., N)$, получаем уравнение

$$\vec{r}_{jt} = \vec{r}_{jx} \wedge \vec{r}_{jxx} \ (j = 1,2,..., N)$$

несвязанных (невзаимодействующих) N вихревых нитей.